

# To-legemeprøbet



**Michael Andrew Dolan Møller**  
**Rosborg Gymnasium og Hf-kursus**  
**November 2012**  
Trykfejl rettet 14. oktober 2013

## Indholdsfortegnelse

Indledning.....	1
Newtons gravitationslov.....	2
Bevægelsesligninger for de to legemer.....	7
Energi og impulsmoment.....	8
Sammenfatning.....	9
Keplers love.....	10
Keplers 1. lov.....	10
Keplers 2. lov.....	11
Keplers 3. lov.....	11
Jordens bane.....	12
Jord-Måne systemet.....	14
Mekanisk energi.....	14
Impulsmoment.....	14
Banekurverne.....	14
Hastigheder.....	14
Hohmann-banen.....	16
Cirkelbaner.....	16
Ellipsebaner.....	17
Sammenfatning.....	19
Kilder.....	20

## Indledning

I denne note vil vi udlede bevægelsesligningerne for partikler, der bevæger sig i et gravitationsfelt. Der vil blive vist eksempler på planetbevægelser om Solen, dobbeltplanetsystemer, Keplers love vil blive undersøgt og endelig vil vi parametrisere bevægelsesligningerne, så man nemt kan løse dem i et for eksempel et regneark. Den tidlige afhængighed af bevægelsen vil vi dog ikke komme ind på her. Interesserede kan læse om dette problem i [1] og [2].

Artiklen er stærkt inspireret af en note, som Henry Nielsen skrev til 1. års fysikstuderende i 1988. [3].

## Newton's gravitationslov

Isaac Newton udgav i 1687 et stort værk om den klassiske mekanik, som stadigvæk er en yderst vigtig disciplin i dag. En af Newtons resultater var gravitationsloven, som vi kender på formen

$$\vec{F} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

hvor  $m$ ,  $M$  er de to legemers masser,  $r$  er deres indbyrdes afstand og  $\frac{\vec{r}}{r}$  er en enhedsvektor, der viser retningen mellem de to legemer. Et eksempel kan ses i illustrationen herunder.

De to legemer påvirker ifølge Newtons 3. lov hinanden med en lige stor men modsat rettet kraft. Dvs. legeme  $M$  føler en lige så stor kraft, som legeme  $m$  gør.

Newton's 2. lov giver en sammenhæng mellem den resulterende kraft på et legeme og dets acceleration. Loven er den velkendte

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$$

Ved at bruge Newton's 2. lov kan vi opskrive accelerationen på for eksempel legeme  $m$  på følgende vis

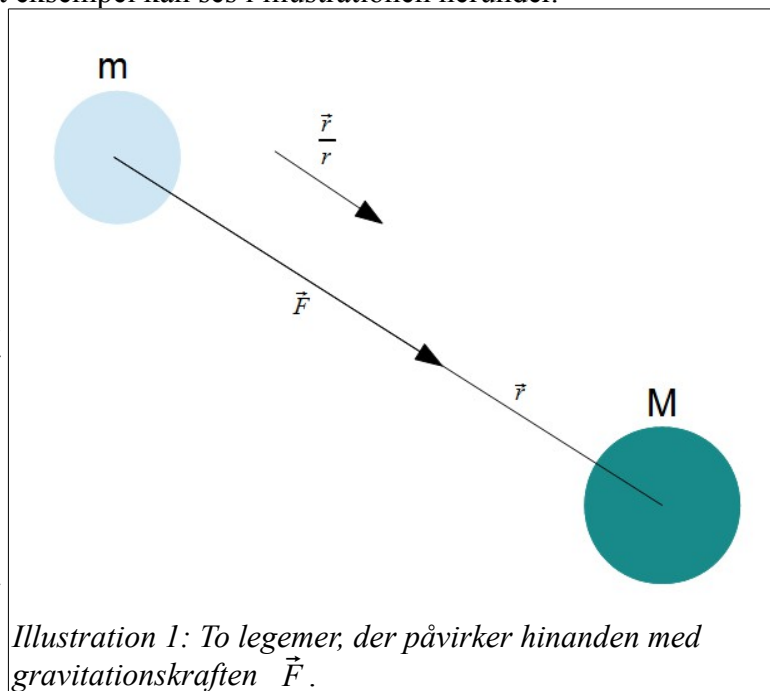


Illustration 1: To legemer, der påvirker hinanden med gravitationskraften  $\vec{F}$ .

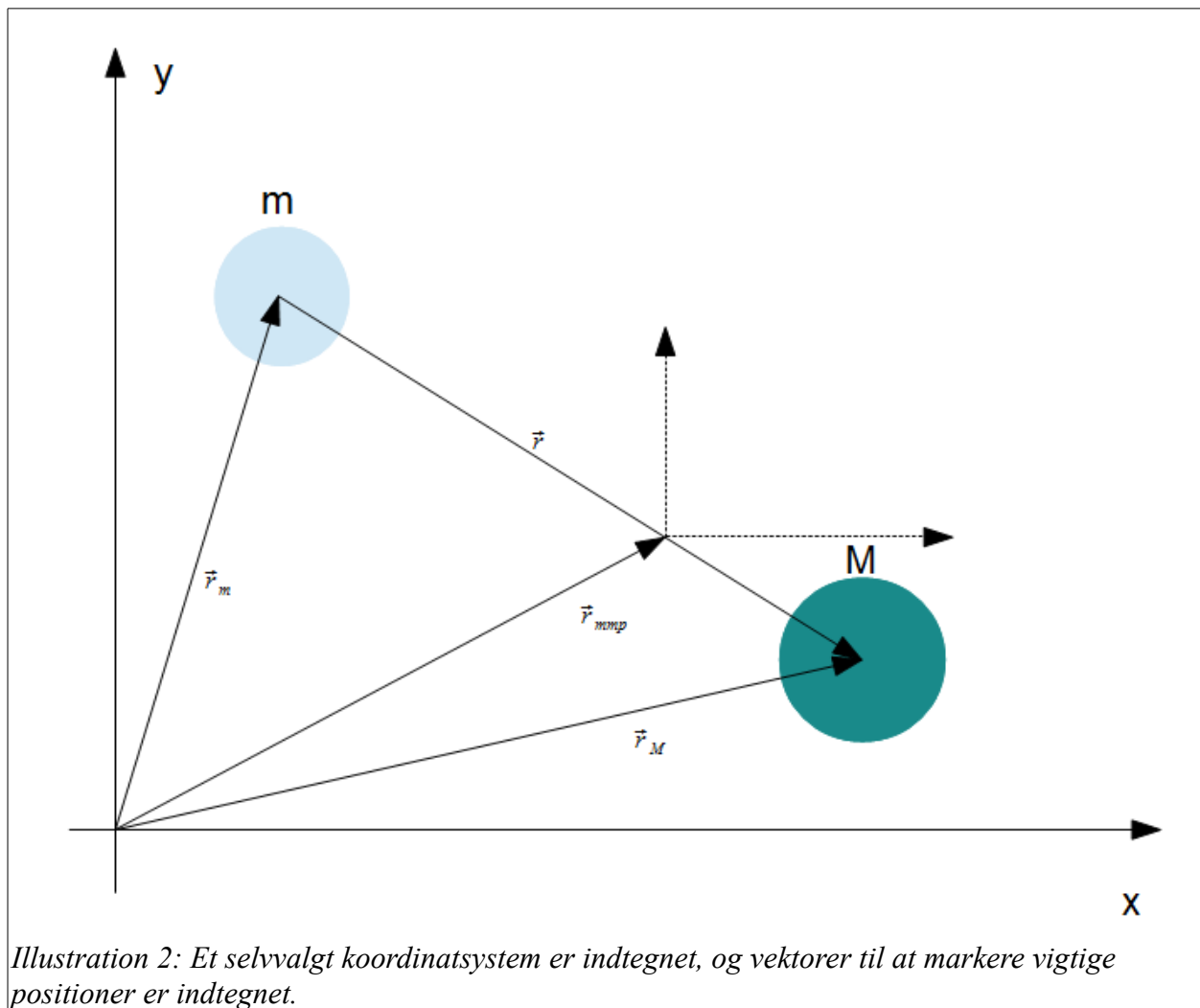
$$\begin{aligned} \vec{F}_{res} &= \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = m \cdot \vec{a}_m = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}_m}{dt^2} \Leftrightarrow \\ \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} &= \frac{d^2 \vec{r}_m}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}_m. \end{aligned} \quad (2)$$

### Øvelse

Opstil et udtryk for accelerationen af legeme  $M$ .

Vi har endnu ikke defineret et koordinatsystem, hvilket man naturligvis skal gøre, når man skal løse (2). Ligning (2) er ret svær at løse, hvis man vælger et almindeligt kartesisk koordinatsystem, så derfor vil vi foretage et skift til polære koordinater, og vi vil vælge centrum for koordinatsystemet i de to legemers massemidtpunkt.

Stedvektorerne for de to legemer kalder vi for  $\vec{r}_m$  og  $\vec{r}_M$ , og vi definerer den relative stedvektor som  $\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_m$ . Illustration 2 viser, hvordan de to legemers stedvektorer er placeret, og vektoren for massemidtpunktet,  $\vec{r}_{mmp}$  er også indtegnet.



Massemidtpunktet kan vi beregne ved hjælp af formlen

$$\vec{r}_{mmp} = \frac{m \cdot \vec{r}_m + M \cdot \vec{r}_M}{m + M} \quad (3)$$

**Øvelse**

Eftersis formlen for massemidtpunktet.

Vi kan nu opskrive de to oprindelige stedvektorer ved hjælp af  $\vec{r}_{mmp}$  og  $\vec{r}$ :

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{mmp} - \frac{M}{m + M} \cdot \vec{r} \quad \text{og} \quad \vec{r}_M = \vec{r}_{mmp} + \frac{m}{m + M} \cdot \vec{r}. \quad (4)$$

**Øvelse**

Benyt (3) og definitionen af den relative stedvektor til at vise (4).

Lad os vende tilbage til (2), som er den ligning for legeme  $m$ , vi skal løse. Man kan også løse bevægelsesligningen for legeme  $M$ , men det er kun nødvendigt at løse den ene af de to ligninger.

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = m \cdot \ddot{\vec{r}}_m \Leftrightarrow \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = m \cdot \left( \ddot{\vec{r}}_{mmp} - \frac{M}{m+M} \cdot \ddot{\vec{r}} \right) = \frac{-M \cdot m}{m+M} \cdot \ddot{\vec{r}} \equiv -\mu \cdot \ddot{\vec{r}} \quad (5)$$

Ved differentiationen ovenfor forsvinder leddet med massemidtpunktet, da koordinatsystemet ikke accelereres – det er et inertialsystem. Det kan vi regne ud, da begge legemer samlet set udgør et fælles system, hvor summen af kræfterne i systemet er 0 ifølge Newtons 3. lov. (Kun gravitationskraften virker på de to legemer.) Da den samlede kraft er 0, er accelerationen af systemet 0. (Men accelerationen på de enkelte legemer er naturligvis ikke 0.)

$\mu$  kaldes for den *reducerede masse*. Man kan forstå størrelsen intuitivt, hvis f.eks. vi betragter Sol-Jord-systemet. Der er  $m \ll M$  og dermed  $m \approx \mu$ . Den reducerede masse kan altså forstås som en lille planet, der kredser om en stor stjerne.

Kraften er parallel med  $r$ , og derfor må kraftmomentet  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ . Altså er impulsmomentet bevaret, da  $(\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}))$ . Hvis impulsmomentet er bevaret i både størrelse og retning, må stedvektor og hastighedsvektor til alle tider være vinkelrette på  $\vec{L}$ , og derfor ligger banebevægelsen i et plan vinkelret på  $\vec{L}$ 's retning. Derfor lægger vi koordinatsystemet, så z-aksen peger i  $\vec{L}$ 's retning. I det valgte koordinatsystem er  $z=0$  til alle tider.

Vi opskriver den relative stedvektor,  $\vec{r}$ , som et tal ganget en retningsvektor. Retningsvektoren for  $\vec{r}$  kaldes  $\vec{e}_r$ . Den er givet ved udtrykket

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Dvs.  $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$ . Vi differentierer og får  $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r$ . I det følgende er det en nyttig ting at bruge hat-vektoren. Husk at  $\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ . Se også illustration 3. Lad os differentiere enhedsvektoren.

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \dot{\varphi} \equiv \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Bemærk at vi her har defineret den 'hattede' retningsvektor til  $\vec{e}_\varphi$ . Vi differentierer også denne og får

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \dot{\varphi} = -\vec{e}_r \cdot \dot{\varphi}.$$

Nu kan vi finde  $\ddot{\vec{r}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = (\dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r)' \Rightarrow \\ &\ddot{\vec{r}} = (\dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \dot{\varphi})' \Rightarrow \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \cdot \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \dot{\varphi} + r \cdot (\ddot{\vec{e}}_\varphi \cdot \dot{\varphi} + \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \ddot{\varphi}). \end{aligned}$$

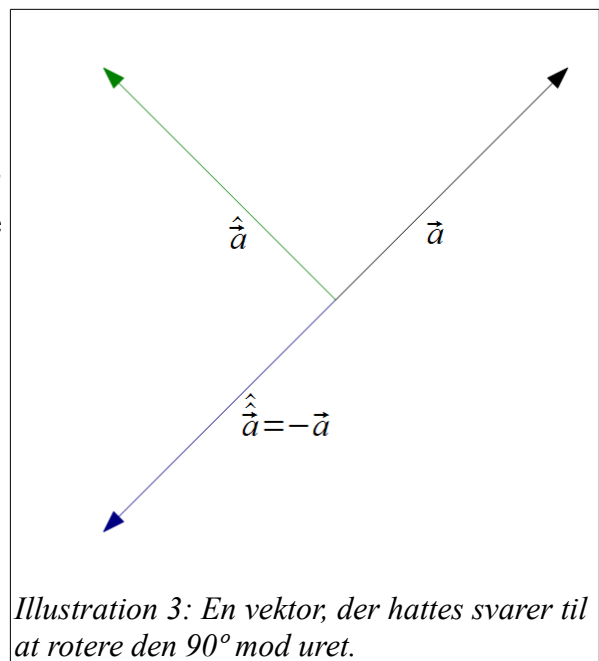


Illustration 3: En vektor, der hattes svarer til at rotere den 90° mod uret.

Reglen om differentiation af et produkt er anvendt ovenfor. Til sidst substituerer vi de differentierede retningsvektorer væk.

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \cdot \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi} + r \cdot (\dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \dot{\varphi} + \vec{e}_\varphi \cdot \ddot{\varphi}) = \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \cdot \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi} + r \cdot (-\vec{e}_r \cdot \dot{\varphi}^2 + \vec{e}_\varphi \cdot \ddot{\varphi}) \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_r + (2\dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi\end{aligned}\quad (7)$$

Udtrykket i (7) indsættes i (5):  $\frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_r = -\mu \cdot \ddot{\vec{r}} = -\mu \cdot ((\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_r + (2\dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi)$ .

På venstresiden er der ingen størrelser, der peger vinkelret på  $\vec{e}_r$ . Altså må 2. led på højresiden være nul. Vi kan dermed i stedet for vektordifferentialligningen (5) nu løse to skalare differentialligninger:

$$2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{r} + r \cdot \ddot{\varphi} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{-G \cdot m \cdot M}{\mu \cdot r^2} = -\frac{G \cdot (m+M)}{r^2} = \ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (9)$$

Vi kan altså sammenfatte følgende:

- Vi har anvendt Newtons 2. lov samt hans gravitationslov til at opstille den resulterende kraft på to legemer med masserne  $m$  og  $M$  i den indbyrdes afstand  $\vec{r}$ . Det gav en vektordifferentialligning.
- Vi har valgt et koordinatsystem med origo i massemidtpunktet for de to legemer. z-aksen peger i impulsmomentets retning, dvs. banebevægelsen foregår i (x, y)-planet.
- Vi har lavet et koordinatskift, så vi i stedet for at løse (2) for begge partikler nu kun løser ligningerne for den reducerede partikel med massen  $\mu$ . Vi kan vha. (4) efterfølgende beregne bevægelsen for de to legemer.
- Endelig har vi vha. vektorregning fået splittet (5) op i to skalare differentialligninger i stedet for én vektordifferentialligning. De to ligninger vil vi nu løse.

Vi så på side 4 at impulsmomentet,  $\vec{L}$ , er bevaret. Vi kan skrive impulsmomentet på to måder; en for den reducerede partikel og en for de to legemer  $m$  og  $M$ . Det viser sig, at det giver samme udtryk, som er:

$$\vec{L} \equiv m \cdot \vec{r}_m \times \vec{v}_m + M \cdot \vec{r}_M \times \vec{v}_M = \mu \cdot \vec{r} \times \vec{v} \Rightarrow L = \mu \cdot r \cdot v_\varphi = \mu \cdot r \cdot r \cdot \dot{\varphi} = \mu \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu \cdot r^2} \quad (10)$$

### Opgave

Ovenstående ligning skal vises.

- Benyt sammenhængen mellem stedvektorerne i formel (3) og (4) samt at  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$  til at vise udtrykket før medførelsetegnet i formel (10) ovenfor. Husk også at vi har sat origo i massemidtpunktet.
- Vis resten idet du husker at  $\vec{v}_\varphi = r \cdot \dot{\varphi}$ .

(10) indsættes i (9) hvorved vi får en differentialligning, som kun afhænger af  $r$  og  $t$ :

$$\frac{-G \cdot m \cdot M}{\mu \cdot r^2} = \ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r \cdot \left(\frac{L}{\mu \cdot r^2}\right)^2 = \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 \cdot r^3} \Leftrightarrow$$

$$\ddot{r} = \frac{-G \cdot m \cdot M}{\mu \cdot r^2} + \frac{L^2}{\mu^2 \cdot r^3} \quad (11)$$

(11) kan man løse mht tiden, og når  $r(t)$  er kendt, kan man løse (10). Det er dog stadigvæk en ganske kompliceret opgave, så vi vil løse  $r(\varphi)$ .

Vi starter med (10) for at ændre differentiation mht. tid til differentiation mht. vinkel:

$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu \cdot r^2} \Leftrightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{\mu \cdot r^2} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu \cdot r^2} \cdot \frac{d}{d\varphi}$ . Vi kan dermed omskrive venstresiden i (11), så formlen nu bliver

$$\frac{L}{\mu \cdot r^2} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{L}{\mu \cdot r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \right) = \frac{-G \cdot m \cdot M}{\mu \cdot r^2} + \frac{L^2}{\mu^2 \cdot r^3} \Leftrightarrow \frac{L}{\mu} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{L}{\mu \cdot r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \right) = \frac{-G \cdot m \cdot M}{\mu} + \frac{L^2}{\mu^2 \cdot r}$$

For at forsimple sagerne vælger vi nu at løse problemet for den reciprokke afstand – dvs. vi definerer  $u \equiv \frac{1}{r}$ . Dermed bliver formlen

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{\mu^2} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( u^2 \cdot \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\varphi} \right) &= \frac{-G \cdot m \cdot M}{\mu} + \frac{L^2 \cdot u}{\mu^2} \Rightarrow L^2 \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( u^2 \cdot \frac{(-1)}{u^2} \cdot \frac{du}{d\varphi} \right) = -G \cdot m \cdot M \cdot \mu + L^2 \cdot u \Leftrightarrow \\ &-\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{-G \cdot m \cdot M \cdot \mu}{L^2} + u \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{G \cdot m \cdot M \cdot \mu}{L^2} \quad (12)$$

(12) er en lineær 2. ordens differentiaalligning, som enhver gymnasieelev på mat A-niveau har lært at løse.

#### Øvelse

- Vis at den generelle løsning til (12) er  $u = c_1 \cdot \cos(\varphi) + c_2 \cdot \sin(\varphi) + R$ , hvor  $R = \frac{G \cdot m \cdot M \cdot \mu}{L^2}$ .
- Vis at  $c_1 \cdot \cos(\varphi) + c_2 \cdot \sin(\varphi) = A \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$ , hvor  $A \cdot \cos(\varphi_0) = c_1$  og  $A \cdot \sin(\varphi_0) = c_2$ .
- Vis endelig at  $u = A \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + R$ , hvor  $R = \frac{G \cdot m \cdot M \cdot \mu}{L^2}$ .

Ved hjælp af resultatet fra øvelsen ovenfor kan vi nu opskrive funktionen for  $r$

$$r = \left( A \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{G \cdot m \cdot M \cdot \mu}{L^2} \right)^{-1} \quad (13)$$

Endelig skal konstanten,  $A$  i (13) bestemmes.

Vi definerer eccentriciteten,  $e \equiv \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$ . Hvis  $\cos(\varphi - \varphi_0) = 1$  er  $r$  mindst og hvis  $\cos(\varphi - \varphi_0) = -1$  er  $r$  størst. Dermed får vi ved indsættelse i definitionen af eccentriciteten at

$$A = \frac{e \cdot G \cdot m \cdot M \cdot \mu}{L^2}. \text{ Dette udtryk indsættes i (13).}$$

$$r = \left( \frac{e \cdot G \cdot m \cdot M \cdot \mu}{L^2} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{G \cdot m \cdot M \cdot \mu}{L^2} \right)^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\left( \left( \frac{G \cdot m \cdot M \cdot \mu}{L^2} \right) \cdot (e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + 1) \right)} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{\left( \frac{L^2}{G \cdot M \cdot m \cdot \mu} \right)}{e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + 1} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{r_0}{e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + 1}, r_0 = \frac{L^2}{G \cdot M \cdot m \cdot \mu} \quad (14)$$

$r_0$  er afstanden mellem de to legemer, når  $\varphi = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{2}$ .

Ved at indsætte (14) i (10) og (11) kan vi få løst bevægelsesligningerne som funktion af tiden, men udtrykket bliver voldsomt indviklet, så det gøres ikke her.

### Bevægelsesligninger for de to legemer

(6) og (14) indsættes i (4), for at vi kan få stedvektorerne for de to legemer

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{mmp} - \frac{M}{m+M} \cdot \vec{r} \quad \text{og} \quad \vec{r}_M = \vec{r}_{mmp} + \frac{m}{m+M} \cdot \vec{r} \Rightarrow$$

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{mmp} - \frac{M}{m+M} \cdot r \cdot \vec{e}_r \quad \text{og} \quad \vec{r}_M = \vec{r}_{mmp} + \frac{m}{m+M} \cdot r \cdot \vec{e}_r \Rightarrow$$

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{mmp} - \frac{M}{m+M} \cdot \frac{r_0}{e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + 1} \cdot \vec{e}_r \quad \text{og} \quad \vec{r}_M = \vec{r}_{mmp} + \frac{m}{m+M} \cdot \frac{r_0}{e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + 1} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow$$

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{mmp} - \frac{M}{m+M} \cdot \frac{r_0}{e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{mmp} + \frac{m}{m+M} \cdot \frac{r_0}{e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$r_0 = \frac{L^2}{G \cdot M \cdot m \cdot \mu}.$$

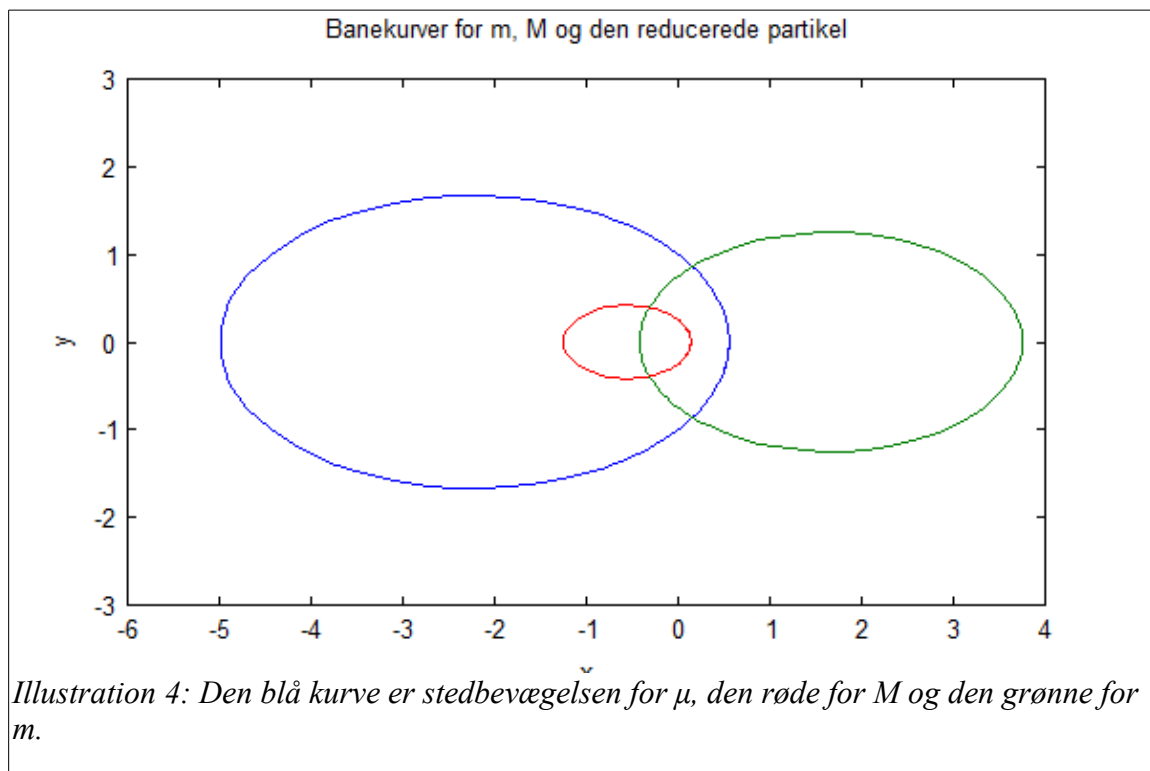
Illustration 4 viser en tegning af de to stedvektorer i (15) samt den relative stedvektor  $\vec{r}$  i tilfældet  $M=3\text{kg}$ ,  $m=1\text{kg}$ ,  $e=0,8$ ,  $r_0=1$ . Altså er  $L = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{G} \cdot (SI)$ .

Man ser af (15), at banekurvernes form er ens, da eccentriciteten er ens for  $m$ ,  $M$  og  $\mu$ . Massemidtpunktet er valgt som origo i illustration 4. (Derved forenkles formlerne i (15) også en smule.)

Vi ser iøvrigt af (15) at impulsmomentets størrelse, har betydning for banekurvens form.

Der er endnu en bevægelseskonstant, som er interessant i banebevægelsen, og det er naturligvis den mekaniske energi. Vi vil i det næste afsnit se på energi og impulsmoment.





### Energi og impulsmoment

Fra (10) så vi, at det samlede impulsmoment for legemerne  $m$  og  $M$  er identisk med impulsmomentet for den reducerede partikel. Vi kan udlede et udtryk for impulsmomentet ved at tage udgangspunkt i (14).

$$L = \sqrt{r_0 \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \mu} = \sqrt{r_0 \cdot G \cdot \mu^2 \cdot (m + M)}. \quad (16)$$

Den mekaniske energi af systemet er

$$E_{mek} = E_{kin}(m) + E_{kin}(M) + E_{pot}(r) = \frac{1}{2} \cdot (m \cdot v_m^2 + M \cdot v_M^2) + E_{pot}(r).$$

Den potentielle energi, kan vi udregne ved hjælp af definitionen af potentiel energi

$$E_{pot}(r) = \int_{\infty}^r \vec{F}_y \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^r (\vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}) \cdot d\vec{r} = G \cdot m \cdot M \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{-G \cdot m \cdot M}{r}. \quad (17)$$

Ovenfor har vi benyttet at kraften er en radiale kraft samt at nulpunktet er valgt i uendelig. Bemærk at den potentielle energi er en energi, der hører til systemet "to legemer." Dvs. systemets samlede mekaniske energi er

$$E_{mek}(r) = \frac{1}{2} \cdot (m \cdot v_m^2 + M \cdot v_M^2) - \frac{G \cdot m \cdot M}{r} \quad (18)$$

Vi lægger koordinatsystemet i massemidtpunktet og differentierer (15). Der indsættes i (18) og efter reduktion får vi følgende udtryk for den mekaniske energi

$$E_{mek} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r_0} \cdot (e^2 - 1) \quad (19)$$

**Øvelse**

- Differentier (15) mht tiden. Husk også at vinklen,  $\phi$ , samt enhedsvektoren skal differentieres. (Brug kædereglene samt reglen for differentiering af et produkt.)
- Beregn størrelsen af kvadratet på hastighederne,  $v_m^2$  samt  $v_M^2$ .
- Indsæt de fundne udtryk i (18) og reducer.

Oftest skriver man energien som funktion af *den halve storakse*,  $a$ , for *den reducerede partikel* som er halvdelen af den maksimale baneradius for hver af de to legemer. Fra (14) får vi for legeme  $\mu$

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{r_0}{1-e} + \frac{r_0}{1+e} \right) = \frac{r_0}{1-e^2} \quad (20)$$

Indsættes (20) i (19) fås

$$E_{mek} = \frac{-G \cdot M \cdot m}{2 \cdot a} \quad (21)$$

Sammenhængen mellem  $a$  og de halve storakser for legeme  $m$  og  $M$  er som følger

$$a_m = \frac{r_m^{max} + r_m^{min}}{2} = \frac{M}{(m+M)} \cdot \frac{(r_{max} + r_{min})}{2} = \frac{M}{m+M} \cdot a,$$

$$a_M = \frac{r_M^{max} + r_M^{min}}{2} = \frac{m}{(m+M)} \cdot \frac{(r_{max} + r_{min})}{2} = \frac{m}{m+M} \cdot a \Leftrightarrow$$

$$a_m + a_M = a$$

Til sidst kan vi indsætte (20) i (16) og vi får  $L = \sqrt{r_0 \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \mu} = \sqrt{(1-e^2) \cdot a \cdot G \cdot \mu^2 \cdot (m+M)}$ .

Læg mærke til at den mekaniske energi er uafhængig af impulsmomentet, mens impulsmomentet afhænger af eccentriciteten  $e$ . Dvs. alle baner med samme halve storakse har samme energi uanset hvor excentriske deres baner er, men deres impulsmoment er ikke det samme.

**Sammenfatning**

Tolegemeproblemet kan karakteriseres ved de to legemers masser  $m$  og  $M$ , eccentriciteten,  $e$ , samt den halve storakse,  $a$ , hvor man har defineret sit koordinatsystems nulpunkt i massemidtpunktet. Impulsmomentet  $L$  er givet ved formlen

$$L = \sqrt{(1-e^2) \cdot a \cdot G \cdot \mu^2 \cdot (m+M)}. \quad (22)$$

Systemets mekaniske energi er givet ved formlen

$$E_{mek} = \frac{-G \cdot M \cdot m}{2 \cdot a} \quad (23)$$

hvor  $a = a_M + a_m$ .  $a_m$  og  $a_M$  er den halve storakse for legemerne med masserne  $m$  og  $M$ .

Stedbevægelsen er givet ved formlerne

$$\vec{r}_m = \frac{-M}{m+M} \cdot \frac{a \cdot (1-e^2)}{e \cdot \cos(\varphi) + 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_M = \frac{m}{m+M} \cdot \frac{a \cdot (1-e^2)}{e \cdot \cos(\varphi) + 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Ovenfor er tiden defineret, så  $\varphi(0)=0$ .

## Keplers love

Newton anvendte Keplers 3 love til at udlede mekanikken, som gravitationskraften er en del af. Derfor er det måske lidt omvendt at udlede Keplers love ud fra Newtons teori, men vi gør det alligevel, da det kan give lidt mere fysisk indsigt i lovene.

### Keplers 1. lov

Første lov lyder: "Planeterne bevæger sig i ellipsebaner omkring Solen, med Solen i det ene brændpunkt."

Formel (14) er netop formlen for en ellipse, når man anvender polære koordinater. Dermed er udtrykkene i (24) også ellipsebaner, da eneste forskel fra (14) er en konstant. Det er altså nok at betragte formel (24), når man skal vise at banen er en ellipse. Vi kan overbevise os om dette ved at omregne til kartesiske koordinater.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r} = \frac{a \cdot (1-e^2)}{e \cdot \cos(\varphi) + 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, r = \frac{a \cdot (1-e^2)}{e \cdot \cos(\varphi) + 1} \Leftrightarrow$$

$$r \cdot e \cdot \cos(\varphi) + r = a \cdot (1-e^2) \wedge x = r \cdot \cos(\varphi) \wedge y = r \cdot \sin(\varphi) \Leftrightarrow$$

$$e \cdot x + \sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot (1-e^2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot (1-e^2) - e \cdot x \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot (1-e^2)^2 + e^2 \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot (1-e^2) \cdot e \cdot x \Leftrightarrow$$

$$(1-e^2) \cdot x^2 + y^2 + 2 \cdot a \cdot (1-e^2) \cdot e \cdot x = a^2 \cdot (1-e^2)^2 \quad (25)$$

$e > 1$

(25) kan skrives på formen  $y^2 - h \cdot x^2 - i \cdot x = j$ , hvor  $h, i, j > 0$ . Denne funktionstype fremstiller en hyperbel.

$e = 1$

I dette specialtilfælde bryder (20) sammen. Det betyder, at den halve storakse  $a$  er uendelig stor. Vi kan dog bruge formlen (14) for stedbevægelsen, og så bliver (25) en smule anderledes:

$$r = \frac{r_0}{e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + 1} \Rightarrow (1-e^2) \cdot x^2 + y^2 - 2 \cdot r_0 \cdot e \cdot x = r_0^2 \Rightarrow y^2 - 2 \cdot r_0 \cdot x = r_0^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{y^2}{2 \cdot r_0} - \frac{r_0}{2}.$$

Ovenstående formel fremstiller en liggende parabel.

$e < 1$

(25) kan skrives på formen  $y^2 + h \cdot x^2 + i \cdot x = j$ , hvor  $h, i, j > 0$ . Denne funktionstype fremstiller en ellipse. Kepler sagde også, at Solen er i det ene brændpunkt. Dette kan vi overbevise os om, da Solens masse er 1047 gange så stor som Jupiters masse, og Jupiters masse er den største i Solsystemet. Stedbevægelsen for Solen er altså med god tilnærmelse  $\vec{r}_M \approx 0$ . Dermed bliver  $a_M$  nærmest 0, og dermed bliver den halve storakse for planetbanen,  $a_m = a$ . Det skal dog siges, at Solen

ikke står helt stille i sin bane. Den kredser omkring det fælles tyngdepunkt med Jupiter med en radius på ca. 0,005AU, hvilket svarer til en Solradius. Kepler havde altså ikke helt ret i at Solen står stille i det ene brændpunkt, men tilnærmelsen er god.

### Øvelse

- Vælg tilfældige  $h, i, j$ -værdier og tegn  $y(x)$  for eccentricitet hhv større eller mindre end 1.
- Vælg en tilfældig  $r_0$  og tegn  $y(x)$  for  $e=1$ .

### Keplers 2. lov

Anden lov lyder: "Aksen mellem planeten og Solen gennemstryger lige store arealer i lige store tidsrum."

(10) siger  $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu \cdot r^2}$ . Vi fandt også på side 4, at  $L$ =konstant både i størrelse og retning.

Betragt illustration 5.

Arealet af trekanten er  $dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot d\varphi$ .

Her har vi tilnærmet arealet som værende arealet af en trekant, hvor grundlinien er  $r$  og højden er  $r \cdot d\varphi$ . Vi kan dele med tidsrummet  $dt$  og vi får dermed

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{L}{\mu \cdot r^2} = \frac{L}{2 \cdot \mu}.$$

Da impulsmomentet er konstant, har vi altså vist at arealhastigheden er konstant – dette er jo netop Keplers 2. lov.

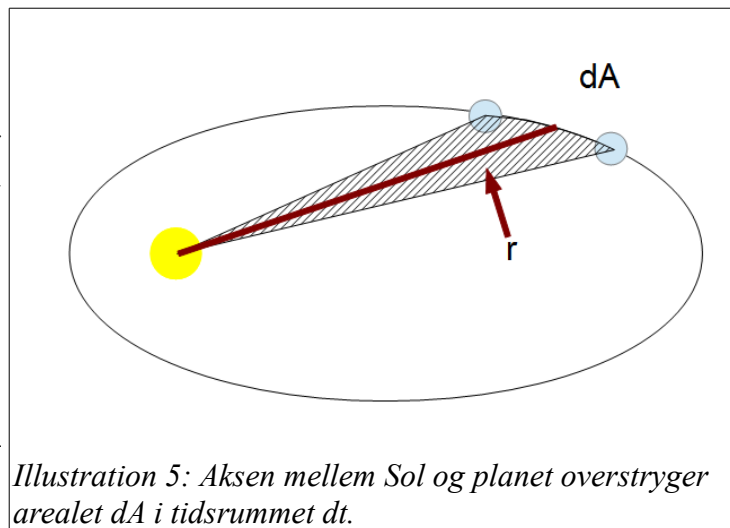


Illustration 5: Aksen mellem Sol og planet overstryger arealet  $dA$  i tidsrummet  $dt$ .

### Keplers 3. lov

Tredie lov lyder: "For en planet gælder at den halve storakse i tredje potens over kvadratet på omløbstiden er en konstant."

Hvis vi integrerer udtryket for Keplers 2. lov, får vi  $\int dA = A = \int_0^T \frac{L}{2 \cdot \mu} dt = \frac{L}{2 \cdot \mu} \cdot T$ .

Fra matematikken ved vi, at arealet af en ellipse er  $A = \pi \cdot a \cdot b$ , hvor  $a, b$  er hhv. Halve storakse og -lilleakse. Dermed kan vi sætte de to udtryk sammen, så vi får

$$\pi \cdot a \cdot b = \frac{L \cdot T}{2 \cdot \mu}. \quad (26)$$

Fra (22) får vi  $L = \sqrt{r_0 \cdot G \cdot \mu^2 \cdot (m+M)} = \sqrt{a \cdot (1-e^2) \cdot G \cdot \mu^2 \cdot (m+M)}$ . Vi mangler at finde et udtryk for  $b$ .

Betragt illustration 6. Hvis vi kan finde koordinaterne for  $c$ , har vi automatisk  $b$ . Vi ved fra tidligere

at  $a = \frac{r_0}{1-e^2}$  og  $r_{min} = \frac{r_0}{1+e}$ . Illustration 6 viser, at liniestykket fra origo til aksen, der er

sammenfaldende med  $b$  er  $|x| = a - r_{min}$ . Dvs.  $|x| = a - \frac{a \cdot (1-e^2)}{1+e} = a \cdot e$ . Da  $x = r \cdot \cos(\varphi)$  og  $y = b = r \cdot \sin(\varphi)$  finder vi ved substitution

$$x = -a \cdot e = \frac{r_0}{e \cdot \cos(\varphi) + 1} \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = -e.$$

Vi kan bruge Pythagoras' sætning til at finde en sammenhæng mellem x, b og r:  $(e \cdot a)^2 + b^2 = r^2$ . Dvs.

$$(e \cdot a)^2 + b^2 = \frac{(a \cdot (1 - e^2))^2}{(e \cdot \cos(\varphi) + 1)^2} = \frac{(a \cdot (1 - e^2))^2}{(e \cdot (-e) + 1)^2} = a^2 \Leftrightarrow$$

$$b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

Til sidst kan vi indsætte udtrykkene for a og b i (26)

$$\pi \cdot a \cdot a \cdot \sqrt{1 - e^2} = \frac{\sqrt{a \cdot (1 - e^2)} \cdot G \cdot \mu^2 \cdot (m + M) \cdot T}{2 \cdot \mu} \Rightarrow \pi^2 \cdot a^4 \cdot (1 - e^2) = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot G \cdot \mu^2 \cdot (m + M) \cdot T^2}{4 \cdot \mu^2} \Rightarrow$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{(m + M) \cdot G}{4 \cdot \pi^2} \tag{27}$$

Kepler påstod, at højresiden er en konstant, men vi ser, at den faktisk varierer en smule, da planeternes masser, m, varierer. Ledet er dog tilnærmelsesvist konstant pga. Solens store masse ift. planetmasserne.

## Jordens bane

Som vi har set viste Kepler, at planeterne bevæger sig i ellipsebaner omkring Solen. Den opdagelse gjorde han ved at studere Marsbanen. Man kan dog også studere Jordens egen bane ved at gøre som Cassini og nogle Jesuiterpræster gjorde i 1650'erne i San Petronio-katedralen i Bologna. [4] Ved at

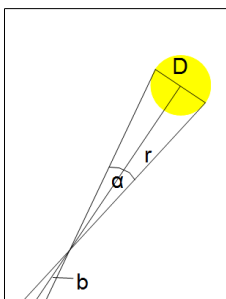


Illustration 8: En skitse af hvordan Solskiven aftegnes på et gulv, hvis der er et punktformet hul i loftet af en bygning.

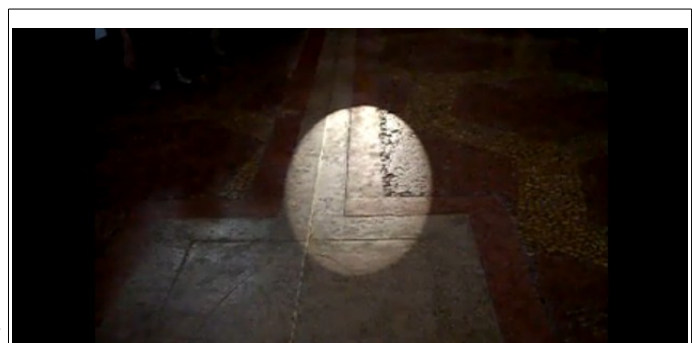


Illustration 7: En meridianpassage optaget i Petronio-katedralen i Bologna. [5]

måle Solens diameter på gulvet hver dag hele året rundt, vil man opdage, at den varierer i løbet af året – fordi Jordens afstand til Solen varierer.

Solens vinkeldiameter på himmelen udtrykker et direkte mål for afstanden til Solen. Det kan man se af illustration 8. Tilnærmelsesvist gælder:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{D}{2 \cdot r} \approx \frac{d}{2 \cdot b} \Leftrightarrow r \approx \frac{b \cdot D}{d}. \text{ Afstanden til Solen } r_{JS} = r + R_J, \text{ men man kan i}$$

en første approksimation sætte Jordens radius,  $R_J$ , til 0. Det er jo et relativt mål for afstanden man får, (D kræves kendt, hvis et absolut mål for afstanden skal beregnes) men for at finde eccentriciteten gør det ikke noget, da formen på ellipsebanen er den samme. Vi kender sammenhængen mellem største og mindste

$$\text{afstand og eccentriciteten fra definitionen, som står på side 6. } e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}. \text{ r er}$$

den relative stedvektor mellem Jorden og Solen, dvs. ved at finde største og mindste afstand for Solen-Jorden, kan eccentriciteten bestemmes. Det viser sig, at

den for Jordbanen er  $e=0,0167$ .

Man kan ved denne metode også finde den halve storakse for Jorden og Solen da  $a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2}$ .

Denne formel kræver dog, at man kan finde de absolutte længder,  $r$ . Dette var ikke en enkel sag at finde, men man kan, ved for eksempel at observere en Venustransit, bestemme den astronomiske enhed. [6] På den måde har man fundet, at middelfstanden mellem Solen og Jorden er  $a = 1,496 \cdot 10^{11} m$ .

Ved at måle et siderisk omløb for Sol-Jord-systemet kan man veje Jord-Sol-systemet. Omløbstiden for Jorden kan måles ved, at man en dag måler Solens position på himmelen – f.eks. lige før Solopgang. Næste gang Solen ved solopgang står nøjagtigt på samme position på himmelen, er et siderisk omløb passeret. En måling viser, at det sideriske omløb  $T=365,256361$  middelsoldøgn.

Man kan nu benytte Keplers 3. lov til at finde Solens og Jordens samlede masse:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot (M+m)}{4 \cdot \pi^2} \Leftrightarrow (M+m) = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1,496 \cdot 10^{11} m)^3}{6,674 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot (365,256361 \cdot 86400s)^2} = 1,989 \cdot 10^{30} kg.$$

Hvis man vil finde afstandene for de øvrige planeter, kan man også benytte sig af Keplers 3. lov, men det kræver først, at man har fundet de sideriske omløbstider for planeterne. Teorien for at finde disse værdier kan læses i [7]. Hvis man vil bestemme Jordens absolutte masse (og dermed også Solens), kan man i princippet sende en satellit i omløb om Jorden, og så benytte Keplers 3. lov til at veje Jorden. Men det er noget lettere og en hel del billigere at udføre Cavendish' eksperiment i stedet for. [8] Jordens masse er i dag kendt til at være  $m = 5,976 \cdot 10^{24} kg$ . Dvs. resultatet i beregningen ovenfor i praksis viser Solens masse.

Ved brug af formlerne på side 9 kan vi finde den halve storakse for Jordens bane omkring massemidtpunktet samt for Solens bane omkring massemidtpunktet.

$$a_m = \frac{M}{m+M} \cdot a = \frac{1,989 \cdot 10^{30} kg}{1,989 \cdot 10^{30} kg + 5,976 \cdot 10^{24} kg} \cdot 1,00 AU = (1 - 3 \cdot 10^{-6}) AU,$$

$$a_M = \frac{m}{m+M} \cdot a = \frac{5,976 \cdot 10^{24} kg}{1,989 \cdot 10^{30} kg + 5,976 \cdot 10^{24} kg} \cdot 1,00 AU = 3,0 \cdot 10^{-6} AU.$$

Det er altså åbenlyst, at Jordens bane til stor præcision beskrives af den reducerede partikels bevægelse<sup>1</sup>. Solbanens halve storakse er altså ca. 450km, som man kan sammenligne med dens radius på 656000km.

Det er dog en smule anderledes for Jupiter, da den vejer 318 gange så meget som Jorden. Sol-Jupiter-systemets halve storakse er  $a = 5,203 AU$ , og dens eccentricitet  $e = 0,0484$ . Her er Solens halve storakse  $a_{Sol} = 4,967 \cdot 10^{-3} AU = 7,43 \cdot 10^5 km = 1,07 \cdot R_{Sol}$ . Her er det altså tydeligt, at Sol-Jupiter-systemet ikke beskrives særligt godt af den reducerede partikels bevægelse.

#### Øvelse

- Beregn impulsmoment og mekanisk energi for Jord-Sol-systemet.
- Gentag beregningen for Sol-Jupiter-systemet.

<sup>1</sup> Bemærk dog, at med vores valg af relativ stedvektor vil den reducerede partikels bane skulle spejles 180° for at den viser Jordens bane.

## Jord-Måne systemet

Jorden og Månen er sammenlignelige i størrelse. Månens masse  $m = 7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg} = 0,0123 \cdot M_{\text{Jord}}$ . Middelfaststanden mellem de to kloder er  $a = 3,84748 \cdot 10^8 \text{ m}$ , og eccentriciteten er  $e = 0,0549$ . Den anomalistiske måned, som er defineret som tiden fra perigæum til perigæum, er 27,554550 middelsoldøgn. Månebanen er svær at beregne præcist, fordi der i realiteten er tale om et tre-legemeproblem. (Solen, Jorden og Månen.) Vi vil dog antage et to-legemeproblem og undersøge bevægelsen uden hensyntagen til Solens træk i Jorden og Månen.

### Mekanisk energi

$$E_{\text{mek}} = \frac{-G \cdot M \cdot m}{2 \cdot a} = \frac{-6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{2 \cdot 3,84748 \cdot 10^8 \text{ m}} = -3,81 \cdot 10^{28} \text{ J.}$$

### Impulsmoment

$$L = \sqrt{(1 - e^2) \cdot a \cdot G \cdot \mu^2 \cdot (m + M)} \Rightarrow$$

$$L = \sqrt{(1 - 0,0549^2) \cdot 3,84748 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot (7,2587 \cdot 10^{22} \text{ kg})^2 \cdot 6,049 \cdot 10^{24} \text{ kg}} \Rightarrow$$

$$L = 2,86 \cdot 10^{34} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s.}}$$

### Banekurverne

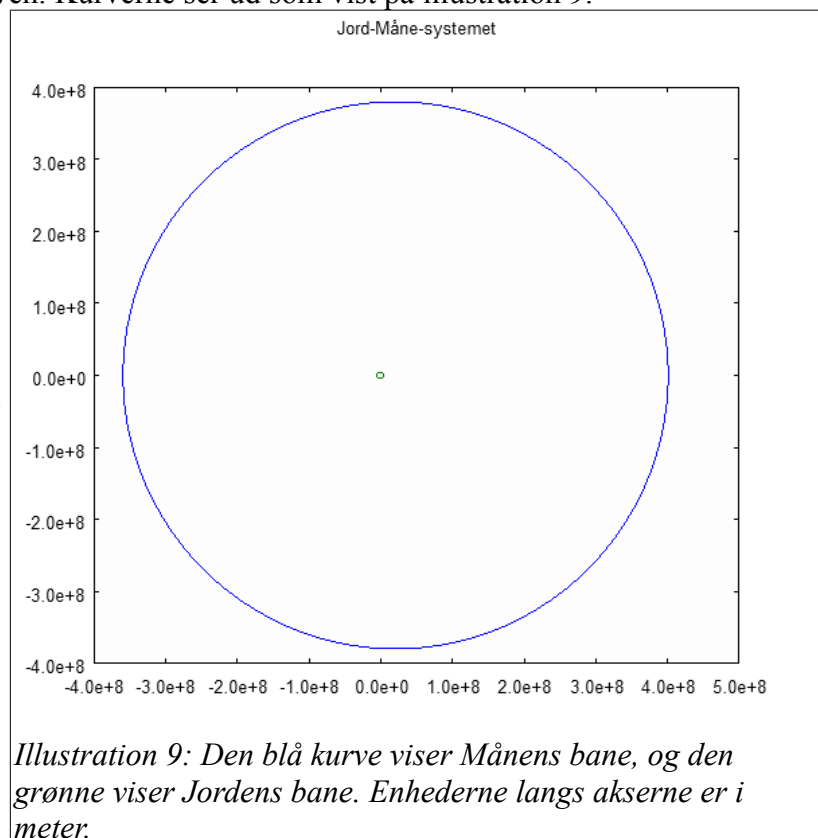
(24) giver os formlerne for banekurven. Kurverne ser ud som vist på illustration 9.

$$\begin{aligned} a_{\text{Månen}} &= 3,80 \cdot 10^8 \text{ m} \\ a_{\text{Jorden}} &= 4,67 \cdot 10^6 \text{ m} \\ r_{\text{max}}^{\text{Månen}} &= 4,009 \cdot 10^8 \text{ m} \\ r_{\text{min}}^{\text{Månen}} &= 3,592 \cdot 10^8 \text{ m} \\ r_{\text{max}}^{\text{Jorden}} &= 4,9298 \cdot 10^6 \text{ m} \\ r_{\text{min}}^{\text{Jorden}} &= 4,4168 \cdot 10^6 \text{ m.} \end{aligned}$$

Illustration 9 er tegnet i Freemat, og koden til at lave beregningerne kan f. eks. se ud som vist i slutningen af dette afsnit. Freemat er i øvrigt en gratis Matlab-klon, som kan hentes i [9].

### Hastigheder

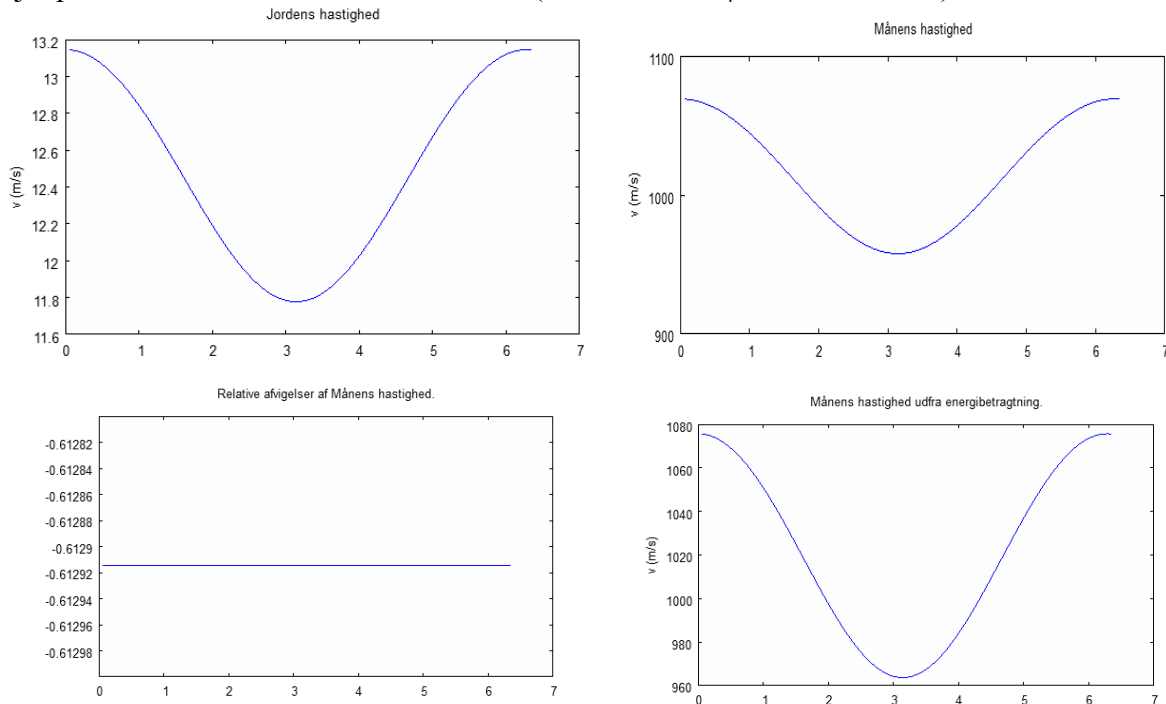
Man kan altid differentiere stedfunktionerne for at få hastighederne i alle punkter. Det er gjort på side 4-5. Ved lidt videre manipulation får man



$$v(\varphi) = \sqrt{r^2 + (r \cdot \dot{\varphi})^2} = \sqrt{\left(\frac{e \cdot L \cdot \sin(\varphi)}{\mu \cdot a \cdot (1 - e^2)}\right)^2 + \left(\frac{L}{\mu \cdot r}\right)^2}, \quad v_m(r) = \frac{-M}{m+M} \cdot v(\varphi), \quad v_J(r) = \frac{m}{m+M} \cdot v(\varphi).$$

Hvis  $m \ll M$  kan man også anvende energiformlen og sætte  $E_{kin}(M) \approx 0$ . Dermed giver mekanikkens energisætning os, at  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v(r)^2 = \frac{-G \cdot M \cdot m}{2 \cdot a} + \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \Rightarrow v(r) = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$ .

Nedenfor er vist en sammenligning af  $|v(r)|$  for Månen beregnet ved en direkte metode, samt ved hjælp af ovenstående tilnærmede formel. (x-aksen viser  $\varphi$  målt i radianer.)



Som man kan se, er den relative fejl på Månens hastigheder konstant lig med 0,61%. Energibetragtninger giver altså en rigtig god tilnærmelse for Månens hastighed.

Det samlede program til at tegne ovenstående banekurver samt hastighedskurver kan se ud som i eksemplet nedenfor.

```

mj=5.976e24;
mm=7.348e22;
my=mm*mj/(mm+mj);
a=3.84748e8;
e=0.0549;
phi=(1:100)*2.*pi/99.;
r=a*(1-e^2)/(e*cos(phi)+1);
rxm=-mj/(mm+mj)*r*cos(phi);
rym=-mj/(mm+mj)*r*sin(phi);
rxj=mm/(mm+mj)*r*cos(phi);
ryj=mm/(mm+mj)*r*sin(phi);
plot(rxm,rym);
plot(rxj,ryj);
plot(rxm,rym,rxj,ryj);
figure(1);title('Jord-Måne-systemet');
rm=sqrt(rxm.^2+rym.^2);
rj=sqrt(rxj.^2+ryj.^2);
rmmax=max(rm);
rmmin=min(rm);
rjmax=max(rj);
rjmin=min(rj);
L=((1.-e^2)*(mj+mm)*a*6.674e-11*my^2)^0.5;
v=sqrt((e*sin(phi)*L/(my*a*(1.-e^2))).^2+(L/(my.*r)).^2);

```



```

vm=mj/(mm+mj)*v;
vj=mm/(mm+mj)*v;
figure(2);plot(phi,vm);
figure(2);title('Månens hastighed');
figure(2);xlabel('phi');
figure(2);ylabel('v (m/s)');
figure(3);plot(phi,vj);
figure(3);title('Jordens hastighed');
figure(3);xlabel('phi');
figure(3);ylabel('v (m/s)');
vmca=sqrt(6.674e-11*mj*(2./r-1./a));
figure(4);plot(phi,vmca);
figure(4);title('Månens hastighed ud fra energibetragtning. ');
figure(4);xlabel('phi');
figure(4);ylabel('v (m/s)');
dvm=(vm-vmca)./vm*100.;
figure(5);plot(phi,dvm);
figure(5);axis([0. 7. -0.613 -.6128]);
figure(5);title('Relative afvigelser af Månens hastighed. ');
figure(5);ylabel('%');
figure(5);xlabel('phi');
    
```

## Hohmann-banen

Walther Hohmann regnede i 1925 ud, hvordan man mest økonomisk kunne flytte sig fra én bane om et centrallegeme til en ny. Det viser sig, at man skal skifte bane via en ellipsebane. Herunder følger et par eksempler på baneskift.

Hastigheden i en ellipsebane for et legeme, der kredser et meget tungere legeme, er i en given afstand,  $r$ , givet ved formlen (vist på side 15)  $v_i = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r_i} - \frac{1}{a_i}\right)}$  og impulsmomentet er givet ved

$$L_i = \sqrt{(1 - e^2) \cdot a_i \cdot G \cdot m^2 \cdot M} = m_i \cdot r_i \cdot v_i.$$

Ovenfor er benyttet at  $M \gg m$ .

## Cirkelbaner

Rumskibet starter i bane 1, og vi vil løfte den op i en højere bane kaldet bane 2. Rumskibet løftes i en ellipsebane, og vi konstruerer banen ved *momentant* at øge hastigheden fra  $v_1$  til  $v_t$ . Betragt illustration 10. Her ser man transportbanen markeret med en stiplede kurve.

Transportbanens halve storakse er  $a_t = \frac{a_1 + a_2}{2}$ ,

dvs. den mekaniske energi i transportbanen er

$$E_{mek} = \frac{-G \cdot M \cdot m}{a_1 + a_2}.$$

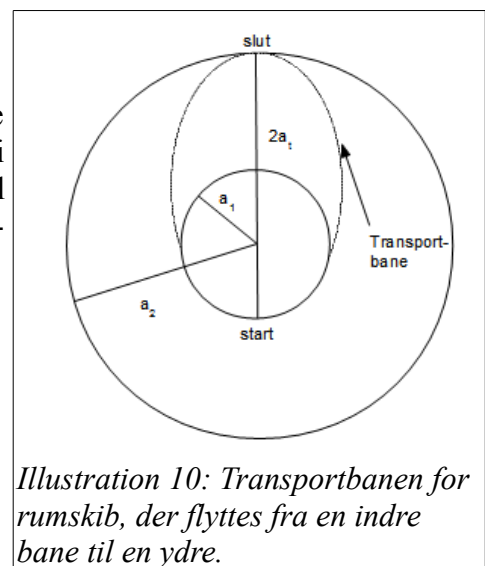


Illustration 10: Transportbanen for rumskib, der flyttes fra en indre bane til en ydre.

Nu kan vi finde den hastighed, som er krævet for at flytte rumskibet ud i transportbanen:

$$\Delta E_{mek} = E_t - E_1 = \frac{-G \cdot M \cdot m}{a_1 + a_2} - \left(\frac{-G \cdot M \cdot m}{2 \cdot a_1}\right) = \Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_t^2 - v_1^2) \text{ og}$$

$$v_t^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right) = \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot a_2}{a_1 \cdot (a_1 + a_2)}.$$

Dermed må hastigheden skulle øges med

$$\Delta v_1 = v_i - v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M \cdot a_2}{a_1 \cdot (a_1 + a_2)}} - \sqrt{\frac{G \cdot M}{a_1}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a_1}} \cdot \left( \sqrt{\frac{2 \cdot a_2}{a_1 + a_2}} - 1 \right) \quad (28)$$

Når rumskibet er kommet op i transportbanens aphelafstand, skal der atter tilføres energi, så eccentriciteten bliver 0, eller sagt på en anden måde skal hastigheden i aphel øges til  $v_{\text{cirkel}}(a_2)$ . Når rumskibet når aphel af transportbanen er  $v_{\text{aphel}} = \sqrt{G \cdot M \cdot \left( \frac{2}{a_2} - \frac{2}{a_1 + a_2} \right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M \cdot a_1}{a_2 \cdot (a_1 + a_2)}}$ .

Dermed kan vi beregne

$$\Delta v_2 = v_{\text{cirkel}} - v_{\text{aphel}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a_2}} - \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M \cdot a_1}{a_2 \cdot (a_1 + a_2)}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a_2}} \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{2 \cdot a_1}{a_1 + a_2}} \right). \quad (29)$$

Man kan altså flytte et rumskib fra en bane til en bane længere væk ved at lave to hastighedsændringer, hvor hastighedsændringerne er givet ved (28) og (29). Bemærk, at hvis man vil flyve fra Jorden til en anden planet, skal man også beregne den energitilførsel, der skal til, for at rumskibet kan blive frigjort fra Jordens tyngdefelt.

#### Øvelse

Udled ligninger for det tilfælde, hvor man ønsker at flytte fra en ydre bane til en indre.

#### Eksempel

Vi ønsker at flytte en rumsonde fra Jordbanen til Marsbanen i tilfældet, at der er tale om cirkelbevægelser i begge baner. De halve storakser er  $a_1=1\text{AU}$  og  $a_2=1,881\text{AU}$ . Vi antager, at rumskibet allerede er fri af Jordens tyngdefelt. (Dvs. Rumskibet skal være skudt afsted med en teoretisk starthastighed på 11,2km/s. I praksis behøver man ikke skyde raketten afsted som et projektil, men den kinetiske energi, der svarer til en starthastighed på 11,2km/s kræves for at undslippe Jordens tyngdefelt.)

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Sol}}}{a_1}} = \sqrt{\frac{G \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}} = 29,8 \text{ km/s.}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}} \cdot \left( \sqrt{\frac{2 \cdot 1,881}{1 + 1,881}} - 1 \right) = 4,25 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{G \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1,881 \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}} \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{2 \cdot 1\text{AU}}{(1 + 1,881)\text{AU}}} \right) = 3,62 \text{ km/s.}$$

Vi kan også beregne flyvetiden, for transportbanen udgør jo en ellipse med Solen i det ene brændpunkt, så vi kan bruge Keplers 3. lov:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^3}{G \cdot M}} = 2,73 \cdot 10^7 \text{ s} = 316 \text{ dage.}$$

#### Ellipsebaner

I Dette eksempel betragtes det tilfælde, at vi har to ellipsebaner, hvis storakser er sammenfaldende. Lad den indre bane have parametrene  $e_1$ ,  $a_1$ , og den ydre bane have parametrene  $e_2$ ,  $a_2$ . Vi vælger, at skyde raketten afsted, når den er i aphel for den indre bane og så lade transportbanen skære perihel for den ydre bane. Situationen er

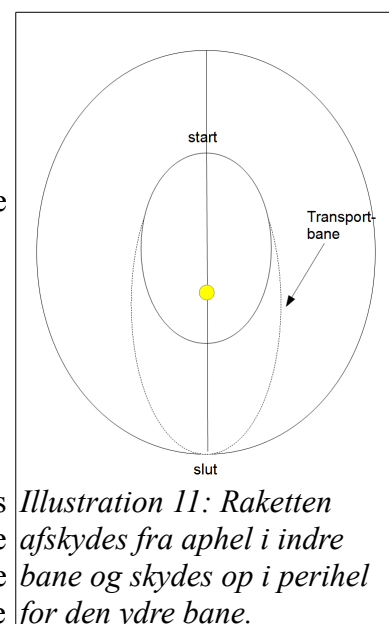


Illustration 11: Raketten afskydes fra aphel i indre bane og skydes op i perihel for den ydre bane.

skitseret i illustration 11.

Den halve storakse for transportbanen er  $a_t = \frac{r_1^{aphel} + r_2^{per}}{2}$ .

$$r_1^{aphel} = (1+e_1) \cdot a_1 \text{ og } r_2^{per} = (1-e_2) \cdot a_2.$$

Ved indsættelse i formlen for mekanisk energi, kan vi finde tilvæksten i mekanisk energi, for at flytte rumskibet fra bane 1 til transportbanen.

$$\Delta E_{mek} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_t^2 - v(r_1^{ap})^2) = \frac{-G \cdot M \cdot m}{(1+e_1) \cdot a_1 + (1-e_2) \cdot a_2} - \frac{-G \cdot m \cdot M}{2 \cdot a_1} \Leftrightarrow$$

$$v_t^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{a_1 \cdot (1+e_1)} \cdot \left( \frac{a_2 \cdot (1-e_2)}{a_1 \cdot (1+e_1) + a_2 \cdot (1-e_2)} \right)$$

Altså kan vi nu beregne den hastighedstilvækst, som rumskibet skal øges for at løfte den ud i transportbanen

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{a_1 \cdot (1+e_1)} \cdot \left( \frac{a_2 \cdot (1-e_2)}{a_1 \cdot (1+e_1) + a_2 \cdot (1-e_2)} \right)} - \sqrt{G \cdot M \left( \frac{2}{a_1 \cdot (1+e_1)} - \frac{1}{a_1} \right)} \Leftrightarrow$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a_1 \cdot (1+e_1)}} \cdot \left( \sqrt{\frac{2 \cdot a_2 \cdot (1-e_2)}{a_1 \cdot (1+e_1) + a_2 \cdot (1-e_2)}} - \sqrt{1-e_1} \right) \quad (30)$$

Når rumskibet er nået ud til transportbanens perihel, er dens hastighed

$$v(r_t^{per}) = \sqrt{G \cdot M \cdot \left( \frac{2}{r_t^{per}} - \frac{1}{a_t} \right)} = \sqrt{G \cdot M \cdot \left( \frac{2}{r_2^{per}} - \frac{1}{a_t} \right)} = \sqrt{G \cdot M \cdot \left( \frac{2}{(1-e_2) \cdot a_2} - \frac{2}{(1+e_1) \cdot a_1 + (1-e_2) \cdot a_2} \right)}.$$

For at komme ind i den nye bane, skal sluthastigheden være

$$v_2 = \sqrt{G \cdot M \cdot \left( \frac{2}{r_2^{per}} - \frac{1}{a_2} \right)} = \sqrt{G \cdot M \cdot \left( \frac{2}{a_2 \cdot (1-e_2)} - \frac{1}{a_2} \right)} = \sqrt{G \cdot M \cdot \left( \frac{1+e_2}{a_2 \cdot (1-e_2)} \right)}$$

Altså må den sidste hastighedsændring blive

$$\Delta v_2 = v_2 - v(r_t^{per}) = \sqrt{G \cdot M \cdot \left( \frac{1+e_2}{a_2 \cdot (1-e_2)} \right)} - \sqrt{\frac{G \cdot M \cdot 2 \cdot (1+e_1) \cdot a_1}{(1-e_2) \cdot a_2 \cdot ((1+e_1) \cdot a_1 + (1-e_2) \cdot a_2)}} \Leftrightarrow$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a_2 \cdot (1-e_2)}} \cdot \left( \sqrt{1+e_2} - \sqrt{\frac{2 \cdot (1+e_1) \cdot a_1}{(1+e_1) \cdot a_1 + (1-e_2) \cdot a_2}} \right) \quad (31)$$

### Eksempel. Satellit omkring Jorden

Lad  $a_1=50000\text{km}$  og  $e_1=0,1$ . Vi ønsker at flytte satellitten op i en ny bane med  $a_2=60000\text{km}$  og  $e_2=0$ .

Dermed får vi i aphel som følger:

$$v_1 = \sqrt{G \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \left( \frac{2}{(1+0,1) \cdot 5,0 \cdot 10^7 \text{ m}} - \frac{1}{5,0 \cdot 10^7 \text{ m}} \right)} = 2,55 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{5,0 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot (1+0,1)}} \cdot \left( \sqrt{\frac{2 \cdot 6,0 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot (1-0)}{5,0 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot (1+0,1) + 6,0 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot (1-0)}} - \sqrt{1-0,1} \right) = 196 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a_2 \cdot (1 - e_2)}} \cdot \left( \sqrt{1 + e_2} - \sqrt{\frac{2 \cdot (1 + e_1) a_1}{(1 + e_1) \cdot a_1 + (1 - e_2) \cdot a_2}} \right) = 56,6 \text{ m/s}.$$

## Sammenfatning

Denne artikel har beskrevet 2-legemeproblemet samt Hohmann-baner. Emnet er slet ikke udtømt med denne korte note, og den interesserede læser kunne f. eks. arbejde videre med Lagrangepunkter, Gravity assist eller udføre en analyse af flerlegemeproblemer ved hjælp af numeriske metoder.

## Kilder

1. [http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s\\_laws\\_of\\_planetary\\_motion](http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_laws_of_planetary_motion)
2. <http://www.jgiesen.de/kepler/kepler.html>
3. "Fysik. Supplerende note C." Af Henry Nielsen, Århus universitet 1988.
4. "How the Catholic Church built the Western Civilization." Af Thomas E. Woods. Regnery Publishing Inc, Washington D. C. 2005. s. 112-113.
5. <http://www.youtube.com/watch?v=iI1kILuZkq4>
6. <http://issuu.com/michaelandrewdolanmoller/docs/denastronomiskeenhed> eller [astro-gym.dk](http://astro-gym.dk)
7. [astro-gym.dk](http://astro-gym.dk). (Kapitel 1.)
8. [http://en.wikipedia.org/wiki/Cavendish\\_experiment](http://en.wikipedia.org/wiki/Cavendish_experiment)
9. <http://freemat.sourceforge.net>
10. Technical Translation F-44: "The Attainability of Heavenly Bodies." Af Walter Hohmann, NASA, Washington, 1960.

Kilde 10 er en oversættelse af Hohmanns "Die Erreichbarkeit des Himmelkörper." Den er en referencekilde til studiet af rumrejser.