

1. Bevægelse med luftmodstand

Formål

- At lære at programmere i Basic.
- At bestemme stedbevægelsen for et legeme, der bevæger sig i tyngdefeltet og som er påvirket af luftmodstand.



Illustration 1: Vulkanske bombers spor kan ses på billedet. Kilde: <https://krakatoavolcanoeruption.weebly.com/background.html>.

Teori

I FysikABbogen 2 kap. 5-6 er der angivet analytiske udtryk for specielle bevægelser, for eksempel bevægelse i tyngdefeltet uden luftmodstand samt jævn cirkelbevægelse og harmonisk bevægelse. Her skal du undersøge bevægelsen for et legemes bevægelse i tyngdefeltet under hensyntagen til luftmodstanden.

Du kan ikke løse problemet analytisk, så du bliver nødt til at løse opgaven numerisk. Dertil kan du f. eks. benytte TI nSpire.

Bevægelsesligningerne kan opstilles ved hjælp af definitionerne af hhv. hastighed og acceleration:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \wedge d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt \Rightarrow \Delta\vec{r} \approx \vec{v} \cdot \Delta t \wedge \Delta\vec{v} \approx \vec{a} \cdot \Delta t \quad (1)$$

Derudover skal man anvende Newton's 2. lov til at finde udtryk for accelerationen på legemet.

Eksempel:

Ved opstillingen af bevægelsesligningerne på en form, som en computer kan forstå, kan man ikke regne med differentielle størrelser, så derfor må man lave en approksimation af udtrykkene for sted, hastighed og acceleration. De er udtrykt i sidste udtryk i (1).

Vi betragter et en-dimensionalt problem, nemlig en kugle der falder i tyngdefeltet uden luftmodstand. Her vil Newton's 2. lov give os et udtryk for accelerationen, som i dette tilfælde er konstant og nedadrettet. Hastighedstilvæksten i det lille tidsrum, Δt , bliver så

$$\Delta v = F_{\text{res}} \cdot \Delta t / m.$$

Hastighedsændringen efter tidsrummet Δt bliver så

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v$$

Tilsvarende får man for stedkoordinaten

$$\Delta y = v \cdot \Delta t$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta y$$

Prøv at sammenligne udtrykkene ovenfor med definitionerne af hastighed og acceleration.

Ved at lade tiden vokse, kan man altså bestemme stedbevægelsen. I nSpire opskriver man bevægelsesligningerne på følgende måde:

$$F := -m \cdot g \quad \{\text{Positiv retning er valgt opad.}\}$$

$$dv := F \cdot dt / m$$

$$v := v + dv$$

$$dy := v \cdot dt$$

$$y := y + dy$$

$$t := t + dt$$

Bevægelse med luftmodstand

Når en partikel bevæges i tyngdefeltet, vil den blive påvirket af tyngdekraften samt luftmodstanden. Kraften fra luften er afhængig af hastighedens størrelse. Hvis hastigheden er 'lille' er gnidningskraften proportional med hastigheden og hvis hastigheden er 'stor' er kraften proportional med *kvadratet* på hastigheden. (Dvs. for store hastigheder stiger gnidningskraften relativt set meget voldsommere end for små hastigheder.)

Vi vil kun betragte en kugles bevægelse i tyngdefeltet, hvor hastigheden er 'stor.' Her viser det sig, at man kan opskrive gnidningskraften på følgende vis:

$$\vec{F}_{\text{luft}} = -\frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho_{\text{luft}} \cdot A \cdot v^2 \cdot \vec{e} \quad (2)$$

Ovenfor er A et tværsnitsareal af kuglen, $c_w = 0,40$ (formfaktoren kaldes også for c_w -værdien og den varierer afhængig af legemets form), $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ (lufts massefylde), og v er kuglens fart. Luftmodstandskraften peger i øvrigt hele tiden modsat bevægelsesretningen. \vec{z} angiver en retningsvektor for stedbevægelsen. Illustration 2 viser kræfterne, som påvirker kuglen.

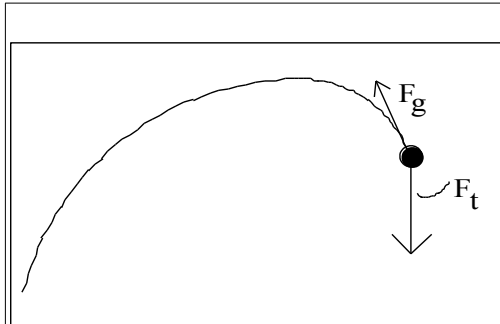


Illustration 2. Sporet af et flyvende legeme med kræfterne indtegnet.

Find enhedsvektorens 1. og 2. koordinater udtrykt ved trigonometriske funktioner og v_x - og v_y -koordinaterne, som antages kendte. (**Hint:** Indtegn hastighedsvektoren i illustration 2 og find vinklen mellem v_x og v eller v_y og v . Hvilken retning peger hastigheden imod i forhold til luftmodstandskraften?)

Simulationens kode

Lodret fald.

- Betragt en partikel med massen, m , der er placeret i højden, y_0 , over et valgt nulpunkt. Skitser situationen, indtegn et valgt koordinatsystem og tegn de kræfter, der virker på partiklen.
- Start nSpire op. Vælg programmodulet, giv programmet et passende navn. (Se evt appendix) og skriv startværdierne for acceleration, hastighed, position og tid samt konstanterne.
- Opstil derefter udtryk for accelerationen, hastigheden og positionen. Beregningerne skal gentages mange gange, så udtrykkene skal ligge i en *For-EndFor*-løkke.
- Husk at sørge for at koordinater og hastigheder efter hver eneste løkkekørsel skal gemmes i nogle generelle variable, så tallene gemmes til udskrivningen.
- Tegn følgende grafer: En (tid, sted)-graf, en (tid, fart)-graf samt en (tid, acceleration)-graf.

Generelt kast.

Betragt situationen fra før, men med den tilføjelse, at partiklen nu kan tilføres en starthastighed i en vilkårlig retning i (x, y) -planet.

- Generaliser modellen fra før, så den nu tager højde for bevægelse i både vandret og lodret retning. Find maksimum-højden på en (tid, sted)-graf og sammenlign resultatet med en teoretisk udregning.

- b) Tilføj luftmodstanden i din formel for \vec{F}_{res}
- c) Betragt en vulkansk *bombe*, der vejer 1000 g, har en densitet på 1800 kg/m³ og som skydes ud fra toppen af en 800 m høj vulkan med farten 30 m/s med en vinkel på 10° i forhold til lodret. Vælg selv en passende form for stenen, beregn dens tværsnitareal og find en værdi for formfaktoren. Beregn dens bane.

Rapportering

Udskrift af

- modellen for det generelle kast
- startværdier
- sted-graf samt hastigheds-graf samt fortolkninger af graferne.

God arbejdslyst.

Appendix

Start af programmeringsmodulet

Når nSpire startes op, skal man tilføje et programmeringsvindue, hvor selve programmet kaldes.

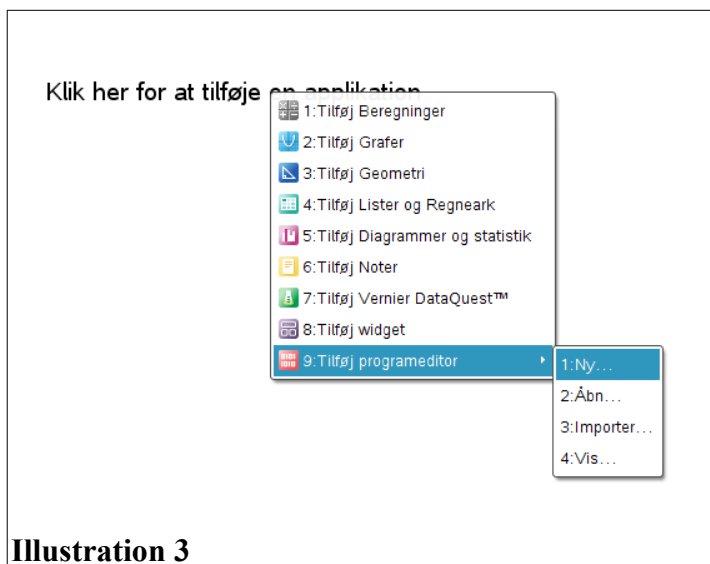


Illustration 3

Når programmet er skrevet og testet, kan man køre programmet fra et almindeligt beregningsvindue, og så kan grafer mv bagefter tegnes på normal vis.

Eksempler på kode

Programkode kan nemt blive totalt rodet, så det kan være en god ide, at krydre programmet med kommentarer, der forklarer, hvad der foregår. Det gør man ved at trykke på *Handlinger-Indsæt kommentar*. (Genvejstast: $Alt+I+\delta$.) Derved fremkommer tegnet ©, og kommentaren kan skrives efter tegnet.

Skal man gentage en beregning mange gange med en løbende variabel, er en løkke en god måde, at gøre det på. Herunder er der et eksempel på en beregning med en indledende kommentar.

© Herunder beregnes en serie funktionsværdier.

```

j:=1
For i,1,10,0.5
  x[j]:=i
  f[j]:=5*i+10
  j:=j+1
EndFor.
    
```

Ovenfor beregnes $f(x)=5x+10$ for $x \in \{1; 1,5; 2; 2,5 \dots 10\}$. Alle værdierne gemmes i variablene x og f. Bemærk, at x og f er vektorer, dvs. de indeholder mange værdier.

Til beregninger kan man bruge nSpires indbyggede funktioner, men bemærk, at hvis man bruger solve()-funktionen, så gemmes resultatet som en tekst, og man kan altså

ikke regne videre med resultatet. Derfor er nsolve()-funktionen mere egnet til at løse en ligning, hvis man får behov for det.

Hvis man vil standse en kørsel, når en variabel får en bestemt værdi, kan man lave en forespørgsel på værdien af variabelen og så bede programmet vælge en eller flere handlinger.

For eksempel kan man skrive følgende kode

```

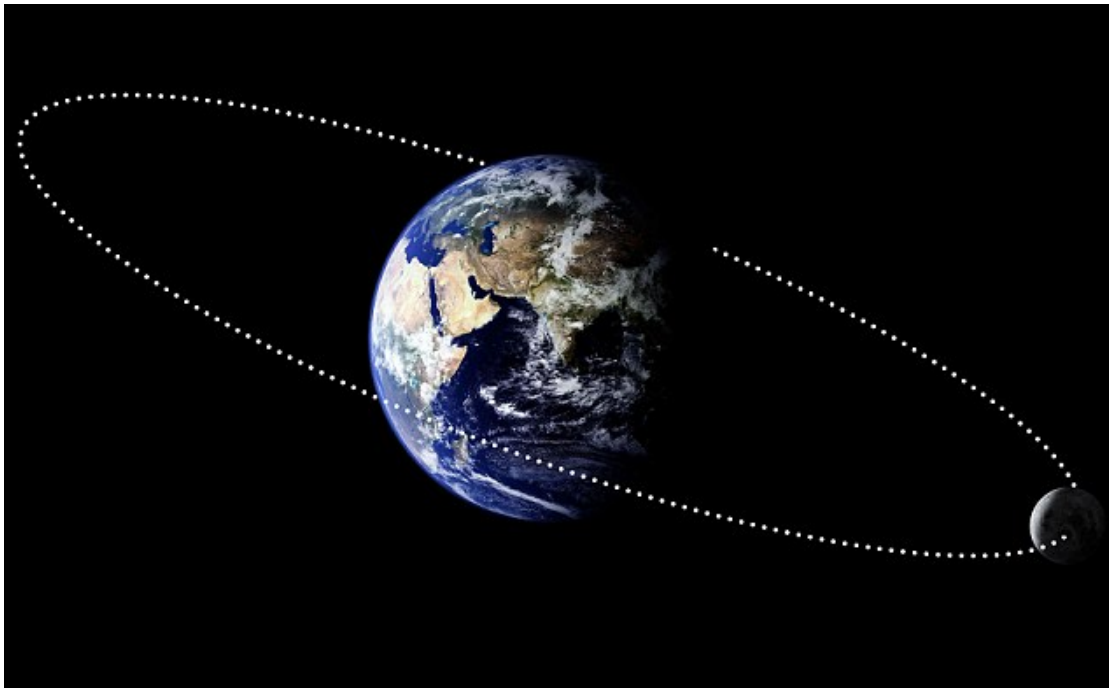
If y < 0 Then
  Goto Afslutning
EndIf
..
..
Lbl Afslutning
DelVar x,y
    
```

Ovenfor ønsker programmøren at afslutte et program, hvis y-variablen bliver negativ. Hvis y ikke er negativ fortsætter programmet efter EndIf-sætningen.

Lbl er en forkortelse for *Label* og DelVar sletter nogle midlertidige variable fra hukommelsen.

Man kan læse mere om programmering på følgende link:

http://tibasic.wikia.com/wiki/TI-Basic_Nspire_Programming



2. Tolegeme-problemet

Det forudsættes at læseren allerede har arbejdet med opgaven "Bevægelse med luftmodstand." Denne øvelse er en fortsættelse af opgaver, der træner begrebet *Computational Thinking*. Metoden i denne opgave er fuldstændig som i opgaven med bevægelse med luftmodstand.

Problemstillingen her er at, du skal løse bevægelsen af 2 legemer, der er gravitationelt bundne. Det kan f.eks. være Jorden og Månen, eller Jorden og Solen, eller Jorden og en satellit.

- a) Tegn problemstillingen og vælg et koordinatsystem.
- b) Vælg bogstaver til at betegne sted-, hastigheds- og accelerationskoordinater for de to legemer.
- c) Tegn relevante kræfter ind på systemet.
- d) Beregn den resulterende kraft på hvert legeme.
- e) Find en enhedsvektor for kraften.
- f) Beregn accelerationen i x- og y-retningen for hvert af de to legemer.
- g) Benyt nu fremgangsmåden fra opgaven om vulkanske bombers bevægelse til at opstille ligningerne for hastigheder og stedfunktionerne.
- h) Tegn stedbevægelsen for de to legemer i samme koordinatsystem.
- i) Frivilligt: Indfør et tredje legeme i problemstillingen og gentag opgaven.

Formelboks

$$\vec{F}_G = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \vec{a} = \vec{v}' = \vec{r}'' \quad \text{og} \quad \vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}.$$