Penduler

Herunder er der nogle øvelser, der trækker dig igennem forskellige tilgange til at lære nyt. I øvelsen *Dæmpede harmoniske svingninger* trænes du først i at analysere en fysisk problemstilling under passende betingelser (”små” penduludsving), og ved hjælp af matematikken, forudsiger du en stedfunktion samt svingningstid for en pendulbevægelse.

Derefter trænes du i at opstille et passende eksperiment til at kontrollere teorien, og du bruger teori+eksperiment til at finde tyngdeaccelerationen, g.

Problemet med friktion løses eksperimentelt, dvs. vi tillægger en matematisk model til vores målinger uden at redegøre nærmere for teorien bag friktion. Sådanne problemstillinger findes også i virkeligheden – altså hvor vi kan måle os frem til nogle egenskaber ved naturen, men vi forstår ikke i detaljer baggrunden bag det observerede.

I øvelsen *Penduler med store udsving* løses samme problemstilling for et penduls svingningstid, men denne gang løses problemet uden antagelsen om, at udsvingene er ”små.” Man indser, at kompleksiteten af et tilsyneladende enkelt problem kan blive ganske voldsom, hvis man vil regne generelt. Løsningen på problemet er givet i teksten, så her trænes elevens evne i at sætte sig ind i en kompliceret beregning.

Til slut lærer du at løse et integral ved hjælp af et CAS-værktøj.

1. Dæmpede harmoniske svingninger

Formål: I denne øvelse skal du analysere et pendul ved hjælp af Newtons love, udlede en formel for svingningstiden og stedbevægelsen for et pendul, som kun har små maksimaludsving, x, i forhold til pendulets længde, l, og dernæst konstruere et forsøg til at kontrollere formlerne.

Lykkedes det at eftervise formlen eksperimentelt, skal resultaterne også bruges til at bestemme tyngdeaccelerationen, g.

Teori: Tegn et pendul med længden, l, og udstrakt længdestykket x fra den lodrette akse. Benyt dit kendskab til Newtons love samt dine matematikkundskaber til at udlede et udtryk for den resulterende kraft, F_{res}. Sammenlign dit udtryk med udtrykket for en fjeder. Forsøg nu at udlede en formel for stedfunktionen samt for svingningstiden for pendulet[1]. Facit skal i øvrigt være

$$x(t)=A\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t+\phi_0\right),\ T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Når pendulet svinger, ser man, at amplituden af svingningen aftager med tiden. Vi antager, at dæmpningen sker eksponentielt. Dvs, du skal gange et led af formen $e^{-\delta\cdot t}$ på din stedfunktion. I databehandlingen skal du vurdere om antagelsen er god eller ej.

Eksperimentet: Opstil forsøg til at undersøge x(t) og T samt find tyngdeaccelerationen, g.

Din databehandling skal indeholde begrundelse for forsøgets udformning, materialeliste, tegning af opstilling, tabeller med målte- og udregnede data og diskussion af disse. Overvej usikkerhederne og forsøg at medtage dem i dine beregninger.

2. Penduler med store udsving

Formål: Et pendul, der svinger med store udsving er noget vanskeligere at analysere end pendulet med små udsving. Dette vil nedenstående udledning vise. Udledningen er ikke pensum.

Teori: Vores opgave er at finde en stedfunktion, $\vec{s}(t)$ som er todimensional. Derudover vil vi opstille et udtryk, der gør det muligt at finde svingningstiden for et vilkårligt stort udsving.

Stedfunktionen er givet ved (x, y)-koordinaterne. Ved brug af cosinus-reglen i retvinklede trekanter ser vi, at $\cos(\phi)=\frac{L-h}{L}\Leftrightarrow h=L\cdot(1-\cos(\phi))$. Vi ser, at y=h med det valgte koordinatsystem.

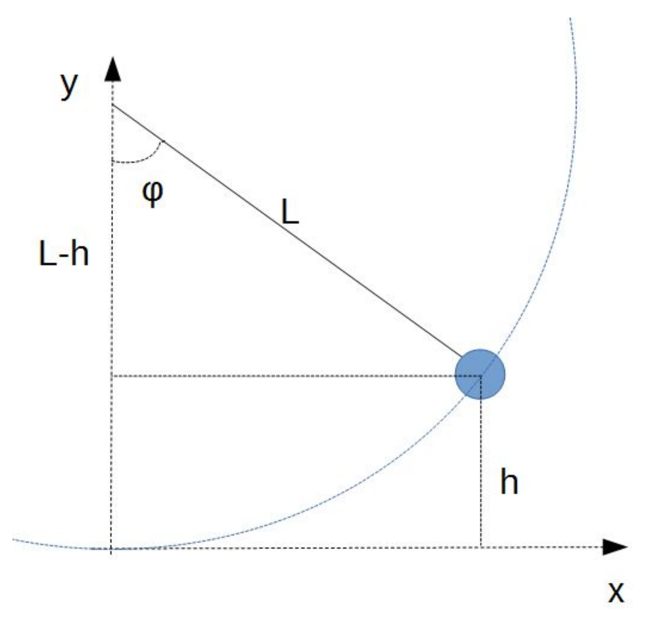


Illustration 1: Et pendul, der svinger.

Ved brug af sinus-reglen i retvinklede trekanter ses, at $x=L\cdot\sin(\phi)$.

Dermed er stedfunktionen givet ved $\vec{s}(t)=L\cdot\begin{pmatrix}\sin(\phi)\\1-\cos(\phi)\end{pmatrix}$.

Som man ser, er koordinaterne ikke angivet ved tidsparameteren, t, hvilket vi oftest ønsker. Vi mangler altså at få tilknyttet tiden til vinklen. Dette gøres i det følgende.

En energibetragtning viser, at ved startudsvinget h_0 er pendulet i hvile, og den mekaniske energi er dermed den potentielle energi ved starten: $E_{mek}=m\cdot g\cdot h_0$.

Ved brug af den udledte sammenhæng mellem højden og vinklen, ser vi, at $h_0=L\cdot(1-\cos(\phi_0))$.

1 Virker opgaven uoverkommelig, så undersøg om du kan finde et udtryk for F_{res} og sammenlign det med kraftudtrykket for en fjeder.

Dermed kan vi udtrykke den mekaniske energi ved startvinklen $E_{mek}=m\cdot g\cdot L\cdot(1-\cos(\phi_0))$.

Den kinetiske energi er givet ved $E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$. Farten er givet som den numeriske værdi af den differentierede stedfunktion. I et lille tidsinterval, dt, vil vinklen, φ, ændres en lille smule. Den størrelse kan vi kalde dφ. Den tilbagelagte afstand ds=L·dφ. (Overvej hvorfor.) Det vil sige, at vi kan udtrykke hastigheden ved hjælp af vinklen φ: $v=\frac{ds}{dt}=\frac{L\cdot d\phi}{dt}$. Dermed kan vi opstille en såkaldt differentialligning for φ, når vi bruger energibevarelse.

$$E_{mek}=m\cdot g\cdot L\cdot(1-\cos(\phi_0))=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+m\cdot g\cdot h\Leftrightarrow$$

$$m\cdot g\cdot L\cdot(1-\cos(\phi_0))=\frac{1}{2}\cdot m\cdot L^2\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2+m\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}\cdot m\cdot L^2\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2+m\cdot g\cdot L\cdot(1-\cos(\phi))\Leftrightarrow$$

$$g\cdot L\cdot(\cos(\phi)-\cos(\phi_0))=\frac{L^2}{2}\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\phi'(t)=\pm\sqrt{\frac{2\cdot g}{L}\cdot(\cos(\phi)-\cos(\phi_0))}.$$

Ligningen ovenfor kaldes en differentialligning. Det drejer sig altså om at finde en funktion φ(t), der indsat i ligningen ovenfor giver et sandt udsagn. Det lyder umiddelbart som en overkommelig opgave, men det er det ikke.

Svingningstiden kan findes ved at integrere udtrykket for φ'(t). Vi integrerer fra startvinklen og ned til at pendulet står lodret. Det svarer til en kvart svingningstid:

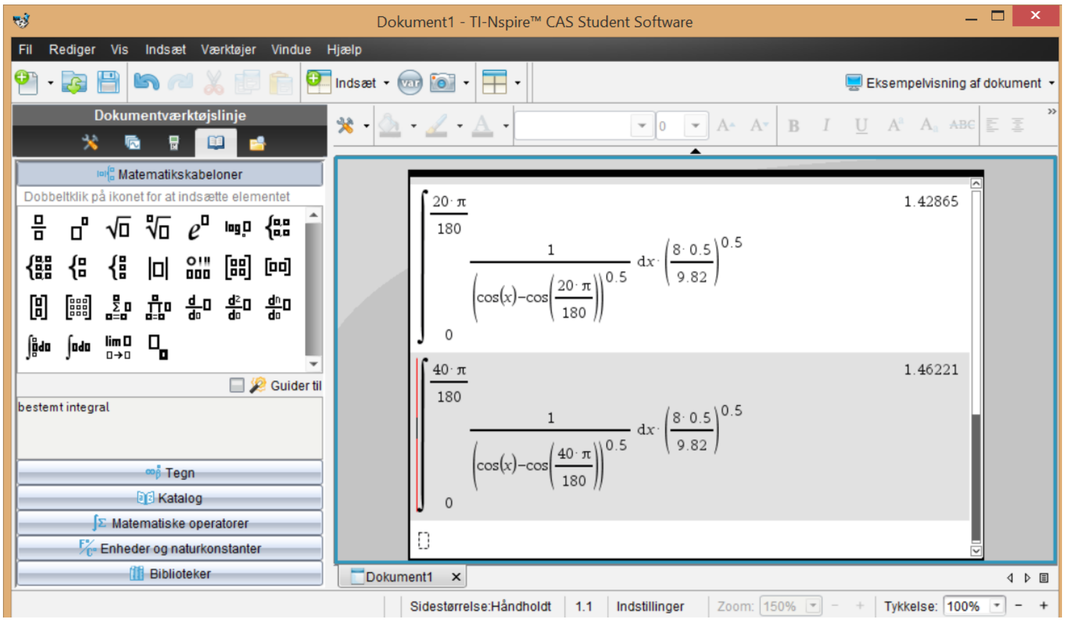
$$\frac{d\phi}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2\cdot g}{L}\cdot(\cos(\phi)-\cos(\phi_0))}\Rightarrow$$

$$\int_{\phi_0}^{0}\left(-\sqrt{\frac{2\cdot g}{L}\cdot(\cos(\phi)-\cos(\phi_0))}\right)^{-1}d\phi=\int_0^{\frac{1}{4}\cdot T}dt=\frac{1}{4}\cdot T\Rightarrow$$

$$T=\sqrt{\frac{8\cdot L}{g}}\cdot\int_0^{\phi_0}\left(\sqrt{(\cos(\phi)-\cos(\phi_0))}\right)^{-1}d\phi$$

Vi har hermed fundet stedfunktion, som indirekte afhænger af tiden, vi har fundet en differentialligning, der knytter vinkel og tid sammen, og endelig har vi fundet en formel for svingningstiden for et vilkårligt stort udsving.

Hvis man vil løse ovenstående ligning i et CAS-værktøj, kan man gøre som følger: Åbn TiNspire og indsæt en math-box i dit dokument. Vælg *matematikskabelon-Bestemt integral.* Skriv formlen ovenfor og tryk på Enter. (Sørg for at indtaste φ_0 i radianer! Selvom man i dokument-indstillinger vælger grader, så kan nSpire ikke finde ud af at regne rigtigt med grader.) Se billede på næste side.



Eksperimentet: Konstruer nogle penduler med forskellige længder. Udtænk et forsøg, hvor du kan variere startudsvinget og måle svingningstiden for udsvinget.

Indsæt dine data i et regneark eller lignende og beregn den forventede svingningstid ved hjælp af formlen for T. Sammenlign måling og teori.

3. Jordens radius og middeldensitet

Formål: I øvelse 1 målte du Jordens tyngdeacceleration. Nu skal du bestemme Jordens radius og derefter beregne Jordens masse samt dens middeldensitet.

Teori: Antag at Jorden er en kugle, der ikke roterer. Benyt Newtons gravitationslov samt tyngdelov til at vise, at der under ovenstående antagelser gælder, at

$$g=\frac{G\cdot M}{R^2},$$

hvor G = $6{,}672\cdot10^{-11}$ N·m²/kg².

Hvis man kender afstanden, d, mellem to kendte positioner langs en meridianlinie, kan Jordens radius bestemmes. Vis formlen

$$R=\frac{180^o}{\pi\cdot\Delta b}\cdot d,$$

hvor Δb er breddegradsforskellen, målt i grader, mellem de to positioner.

Eksperimentet: Hav en GPS-applet samt et kompas installeret på din telefon, benyt et målebånd til at udmåle en kendt længde d langs en meridian, og aflæs breddegraden ved start- og slutsted langs længden.

Har du ikke fundet tyngdeaccelerationen i øvelse 1, så lav øvelsen og mål g. Beregn Jordens radius, og beregn derefter Jordens masse. Beregn Jordens volumen og bestem Jordens middeldensitet.

-o-