Bestemmelse af

Den astronomiske enhed

Snapshot fra Stellarium

Michael Andrew Dolan Møller
Rosborg Gymnasium og Hf-kursus

Juni 2012. (Redigeret maj 2015 og sept. 2018.)

Indholdsfortegnelse

Indledning....3
Ækvatorealsystemet....3
    Timevinkel....3
Parallaksemetoden....4
    Beregning af Kordelængden, AB....5
    Retning til Venus i Jordkoordinater....6
Afstanden mellem Jorden og Venus....7
    Ved formørkelser....7
    Ved beregning....8
    Sammenfatning....8
Konklusion....9
Opgaver....10
Referencer....11

Indledning

5. juni 2012 var der en Venustransit, som er en relativt sjælden begivenhed. F. eks. kommer den næste transit først den 11. december 2117. En Venustransit kan bruges til at finde et absolut mål for den astronomiske enhed, og da denne enhed er grundlaget for størrelsesforholdene i solsystemet samt også grundlag for længdeenheden parsec, pc, som bruges til at angive afstande i astronomien, har det altid været interessant at få den astronomiske enhed bestemt.

Richer og Cassini målte længden af den astronomiske enhed i 1672 ved at betragte Mars [8], og Edmund Halley bestemte i 1716 en lidt anderledes metode til at finde længden af den astronomiske enhed. I 1769 lykkedes det andre at få målt værdien ved hjælp af Halleys metode. Halley selv døde i 1742. [2]. Halleys metode gav en astronomisk enhed på 151 millioner km, som kun er 1,4 millioner km større end den nuværende bestemmelse af enheden. [3]

Se [1] og [2] for at læse mere om Halleys metode.

I denne note vil vi finde den astronomiske enhed ved at simulere nogle samtidige observationer for 2 lokaliteter. Det forudsættes, at læseren har kendskab til det ækvatoreale koordinatsystem. (Se evt. noten ”Kapitel 1 – Introduktion til astronomi” i [4].) Systemet repeteres kort nedenfor.

Ækvatorealsystemet

Når astronomer angiver himmellegemers positioner, angives de oftest i ækvatoreale koordinater, der er defineret på følgende måde: Man tegner en himmelkugle med Jorden i centrum. Så projiceres Jordens ækvator ud på himmelkuglen, man vælger nulpunkt i forårspunktet og måler deklinationen vinkelret på himmelens ækvator. Se illustration 1.

Man skal altså forestille sig, at alle himmellegemerne er klistret fast på en sfære i en fast afstand. 1. koordinaten, *rektascensionen*, α, måles i timer, minutter og sekunder, hvor 24^h svarer til 360^o.

2. koordinaten, *deklinationen*, δ, måles i grader, bueminutter og buesekunder.

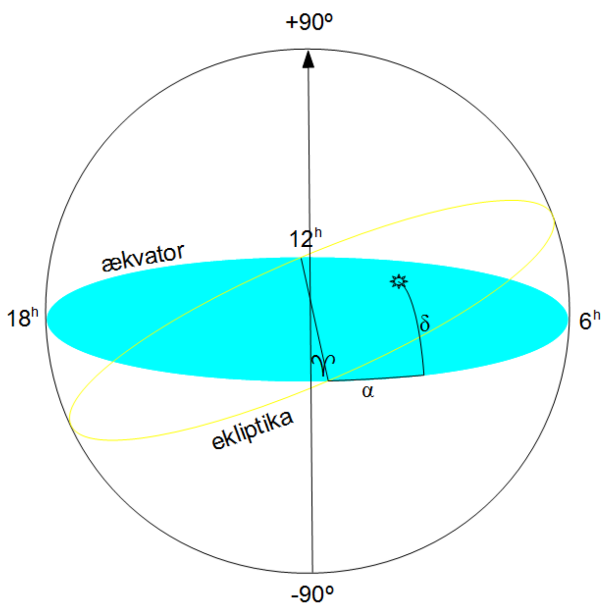

Illustration 1: Ækvatorealsystemet.Forårspunktet er det skæringspunkt mellem himmelens ækvator og ekliptika, hvor Solen er til forårsjævndøgn omkring 21. marts.

Timevinkel

Jorden spinner om sin egen akse med en periode på $T = 23^h56^m4{,}1^s$. Da denne periode altså er en smule mindre end 24^h, anvender astronomer derfor også et tidssystem, som kaldes siderisk tid – på dansk *stjernetid*. Ligesom civiltid afhænger af, hvor man er på Jorden, afhænger stjernetiden også af ens position. Den lokale stjernetid forkortes LST.

LST er 0 når forårspunktet krydser den lokale *meridian*, som er den cirkelbue, der går gennem nordobservatørs zenith-syd. Hvis forårspunktet krydser nulmeridianen, som findes over Greenwich ved London, kaldes tidspunktet for GST. (Greenwich Sidereal Time.)

Hvis man definerer længdegrader, λ, på Jorden til at være negative, når man går østpå gælder følgende sammenhæng mellem LST og GST: LST = GST-λ.

Eksempel
Århus er 10º12'36" øst for Greenwich. Lad os f.eks. antage at en dag er GST = $23^h40^m10^s$. Vi vil beregne LST for Århus. Længdegraden for Århus skal omregnes til h m s, og da Århus er øst for Greenwich, skal man sætte et minus foran talværdien. Dvs.

$$LST = GST - \lambda = 23^h + \frac{40^m}{60^{m/h}} + \frac{10^s}{3600^{h/s}} - \frac{-(10+12/60+36/3600)}{360} \cdot 24^h = 23{,}669444^h + 0{,}6806667^h \Rightarrow$$
$$LST = 24{,}350111^h = 0{,}350111^h = 0^h\,21^m\,4^s.$$

Bemærk at LST altså er længere fremme i Århus end i Greenwich, akkurat som civil tid for Danmark er længere fremme end i Greenwich. Astronomer laver dog ikke tidszoner, som civillivet gør – hver observatør har sin helt egen lokale tid.

Timevinklen, θ, for et himmellegeme defineres som den vinkelafstand (målt i h m s), legemet er fra observatørens meridian. Dvs. – når legemet krydser meridianen er timevinklen, θ = 0, og når legemet fortsætter over på den vestlige del af himmelen stiger timevinklen. [5] Man kan bruge timevinklen til at bestemme positionen af forårspunktet samt et himmellegeme (Venus for eksempel) ved at bruge reglen: $\theta = LST - \alpha_{klode}$. Specielt gælder for forårspunktet, ♈, som jo har α = 0 at $\theta_{♈} = LST$.

Parallaksemetoden

Prøv at stirre på et punkt på en væg, som er ca. 2-3 m væk. Kig på punktet skiftevis med højre og venstre øje – det ser ud som om, punktet hopper til højre og venstre, mens du blinker. Vi ved jo godt, at punktet står stille, men fordi vore øjne er placeret et lille stykke fra hinanden, er synsretningerne til punktet fra de to øjne en smule forskellige. Denne effekt kaldes for parallakseeffekten. Fænomenet optræder også, hvis to observatører langt fra hinanden på Jordens overflade, på samme tid betragter det samme himmellegeme. I forhold til baggrundsstjernerne vil de to observatører altså måle små forskelle i himmellegemets placering på himmelen. Dette er forsøgt vist på illustration 2.

Øvelsen består derfor i at måle p og derefter finde afstanden A'B'. Derefter kan vi finde en sammenhæng mellem A'B', p og d.

Øvelse
Tegn illustration 2 over på et stykke papir. Tegn en cirkel med radius, d, og centrum i midten af Venus. Ræsonner dig frem til, at følgende formel må gælde: $\frac{p}{2\cdot\pi} = \frac{A'B'}{2\cdot\pi\cdot d}$.

Reducer formlen og isoler d.

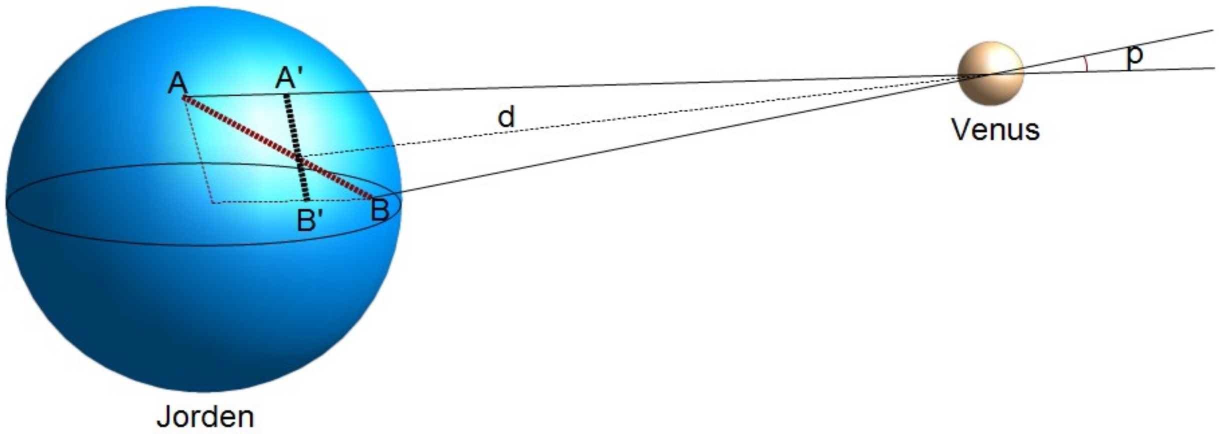

Illustration 2: To observatører i A og B måler positionen af Venus eller en anden klode. De to observatørers indbyrdes afstand er markeret ved den rødfarvede korde, der er stiplet med fed. (Liniestykket AB.) Den sortstiplede korde A'B' er den del af AB, der er vinkelret på afstandsstregen, d, til Venus.

De to observatører har gode instrumenter til koordinatmålinger, der gør det muligt at måle (α, δ) for Venus, og fordi de står forskellige steder, måler de forskellige koordinatsæt. Parallaksevinklen, p, er uhyre lille, og derfor gælder Pythagoras' sætning fra plangeometrien også her, selvom himmelsfæren jo netop ikke er plan. Dvs. vi kan finde parallaksevinklen $p=\sqrt{(\alpha_A-\alpha_B)^2+(\delta_A-\delta_B)^2}$.

Formlen gælder, hvis man regner i radianer, så man skal huske, at omregne α og δ til radianer.

Eksempel
To observatører i hhv. Århus og Canberra måler den 5/6-2012 kl. 0300 ET[1] følgende koordinatsæt for Venus:
$(\alpha,\delta)_A=(5^h0^m26^s;+23^o5'57'')$ Parallaksen i radianer er: $p=\sqrt{\left(\frac{2^s}{24\cdot 60\cdot 60^s}\cdot 2\cdot\pi\right)^2+\left(\frac{53^o}{3600}\cdot\frac{\pi}{180}\right)^2}=2{,}953\cdot 10^{-4}\,rad$.
$(\alpha,\delta)_B=(5^h0^m24^s;+23^o6'50'')$

Øvelse
Download og installer Stellarium på din pc. Se [7] for et link. Prøv at måle værdierne, som er angivet i eksemplet ovenfor.

Beregning af Kordelængden, AB

Geografiske positioner er angivet ved en længdegrad, λ, og en breddegrad, β. Hvis vi antager, at Jorden er kugleformet, kan vi udtrykke enhver position på Jorden ved en vektor, $\vec{r}$. I kartesiske koordinater er vektoren givet ved følgende udtryk:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\lambda)\\R\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\lambda)\\R\cdot\sin(\beta)\end{pmatrix}. \quad [6]$$

Eksempel
I forrige eksempel betragtede vi nogle observationer målt i Århus og Canberra. Koordinaterne for de to byer er som følger:
Århus: (λ, β) = (-10º12'36"; +56º9'36")
Canberra: (λ, β) = (-149º7'48,02"; -35º18'36")

1 ET betyder *efemeridetid* og er et præcist mål for "frk. Klokkens" tid i Greenwich.

Vi antager Jordens radius til at være ens overalt og R=6372km.
Dermed bliver de to vektorer:

$$\vec{r}_{Århus}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(56{,}16^0)\cdot\cos(-10{,}21^0)\\\cos(56{,}16^0)\cdot\sin(-10{,}21^0)\\\sin(56{,}16^0)\end{pmatrix}\cdot 6371\,km=\begin{pmatrix}3492\\-628{,}9\\5292\end{pmatrix}km.$$

$$\vec{r}_{Canberra}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-35{,}31^0)\cdot\cos(-149{,}13^0)\\\cos(-35{,}31^0)\cdot\sin(-149{,}13^0)\\\sin(-35{,}31^0)\end{pmatrix}\cdot 6371\,km=\begin{pmatrix}-4462\\-2668\\-3682\end{pmatrix}km.$$

Kordevektoren mellem de to byer er dermed $\vec{r}_{Canberra}-\vec{r}_{Århus}=\begin{pmatrix}-7954\\-2039\\-8974\end{pmatrix}km\Rightarrow \quad |\vec{r}_{Canberra}-\vec{r}_{Århus}|=AB=12164\,km.$

I eksemplet ovenfor har vi nu beregnet den direkte afstand mellem to observationsbyer, men vi er jo ude efter den del af AB, der peger vinkelret på retningsvektoren mellem Venus og Jorden. Dvs. vi skal finde retningen til Venus.

Retning til Venus i Jordkoordinater

I eksemplet på side 5 fandt vi de ækvatoreale koordinater for Venus set fra to byer. Hvis vi transformerer de ækvatoreale koordinater til geografiske koordinater, kan vi konstruere en enhedsvektor for d i illustration 2. Der er heldigvis et vist fællesskab mellem de to koordinatsystemer, idet de to ækvatorplaner er fælles i de to koordinatsystemer. Derfor vil $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{Venus}}$ = $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{Venus}}$. Længdegrad og rektascension er dog ikke helt ens, da rektascension måles udfra forårspunktet og længdegrader måles ud fra Greenwich-meridianen.

Ud fra timevinklen, θ, af Venus kan vi beregne de lokal stjernetider, LST_i, for de to positioner ved hjælp af formlen LST = θ + α. Derefter kan vi regne Greenwichs sideriske tidspunkt, GST, ud ved at bruge formlen GST = LST + λ. (Se evt. side 3.) Når GST er kendt har vi timevinklen for forårspunktet, og så har vi fået placeret nulpunktet for rektascension i forhold til Greenwich-meridianen. Dermed kan planetens rektascension omregnes til en længdegrad.

Sammenfattet er formlerne:

$$LST_{observationssted}=\theta_{himmellegeme}+\alpha_{himmellegeme}\wedge GST=LST_{observationssted}+\lambda_{observationssted}=\theta_{forårspkt}.$$

Eksempel
Vi fortsætter eksempelrækken ved at betragte Århus og Canberra. Tallene er aflæst i Stellarium på datoen 5/6-2012 kl. 03.00 ET.

$$LST_{Århus}=15^h36^m12^s+5^h0^m26^s=20^h36^m12{,}6^s.$$
$$LST_{Canberra}=0^h51^m54^s+5^h0^m24^s=5^h52^m18^s.$$

$$GST_1=20^h36^m12{,}6^s-\frac{(10+12/60+36/3600)^o}{360^o}\cdot 24^h=19^h55^m22^s.$$
$$GST_2=5^h52^m18^s-\frac{(149+7/60+48{,}02/3600)^o}{360^o}\cdot 24^h=-4{,}0703^h=19{,}92967^h=19^h55^m47^s$$
$$\langle GST\rangle=19^h55^m35^s.$$

Da $GST=\theta_{Forårspunktet}$ ifølge definitionen af ækvatorealsystemet, har vi altså timevinklen på forårspunktet. I geografiske koordinater er positive længdegrader mod vest og rektascension måles mod øst, og derfor må Venus' geografiske længdegrad være $\lambda_{Venus} = \theta_{forårpunkt} - \alpha_{Venus} = 19^h 55^m 35^s - 5^h 0^m 26^s = 14^h 55^m 9^s = 223{,}79^o$.

Altså kan vi nu bruge formlen nederst på side 5 til at finde retningsvektoren for d:

$$\vec{e}_d = \begin{pmatrix} \cos(23{,}099^0)\cdot\cos(223{,}79^0) \\ \cos(23{,}099^0)\cdot\sin(223{,}79^0) \\ \sin(23{,}099^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6640 \\ -0{,}6365 \\ 0{,}3923 \end{pmatrix}.$$

For at finde A'B' kan vi bruge nogle resultater fra vektorregningen. Vi ved jo, at for to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder, at $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(v)$. Dvs. vinklen mellem $\vec{d}$ og $\vec{AB}$ kan findes ved følgende formel:

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB}\cdot\vec{d}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{d}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB}\cdot\vec{e}_d}{|\vec{AB}|}\right).$$

Endelig kan man ved at betragte illustration 2 se, at $A'B' = AB\cdot\sin(v)$.

Øvelse
Prøv at overbevise dig om, at $A'B' = AB\cdot\sin(v)$ gælder. Hint: Find en retvinklet trekant på tegningen og benyt dig af at sin(v) = cos(90-v).

Eksempel
Med de dansk-australske data kan vi altså beregne vinklen, v:

$$\frac{\vec{AB}\cdot\vec{e}_d}{12164\,km} = \begin{pmatrix} -7954 \\ -2039 \\ -8974 \end{pmatrix} \frac{km}{12164\,km} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}6634 \\ -0{,}6371 \\ 0{,}3924 \end{pmatrix} = 0{,}2511 \Rightarrow v = \cos^{-1}(0{,}2511) = 75{,}46^o.$$

Dermed bliver $A'B' = 12164\,km\cdot\sin(75{,}46^o) = 11774\,km$.

I eksemplerne har vi nu beregnet A'B' samt parallaksen p. Dermed kan den absolutte afstand mellem Jorden og Venus bestemmes, og den bliver:

$$d = \frac{A'B'}{p} = \frac{11774\,km}{2{,}953\cdot10^{-4}\,rad} = 3{,}987\cdot10^7\,km.$$

Afstanden mellem Jorden og Venus

Ved formørkelser

Ved at observere Venus' synodiske omløbstid, altså tidsrummet fra nedre konjunktion til nedre konjunktion, kan man bestemme Venus' sideriske omløbstid. Dernæst kan man ved hjælp af Keplers 3. lov bestemme Venus' halve storakse i astronomiske enheder.

En måling viser, at Venus' synodiske omløbstid er på 584 dage = 1,599 yr. Dermed kan den sideriske omløbstid beregnes af formlen: $\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{T_{Jorden}} + \frac{1}{T_{syn}} = 1\text{yr}^{-1} + \frac{1}{1{,}599\,yr} \Rightarrow T_{sid} = 0{,}6153\,yr.$

Ved indsættelse i Keplers 3. lov fås: $a = T^{2/3} = 0{,}6153^{2/3} = 0{,}723\,AU.$ Da Jordens afstand er 1 AU, hvis vi ser bort fra eccentriciteten, vil afstanden mellem Venus og Jorden være 0,277 AU, såfremt vi er meget tæt på nedre konjunktion. [4: Kapitel 1 - "Introduktion til astronomi."]

Dermed får vi at $0{,}277\,AU = 3{,}987\cdot 10^7\,km \Leftrightarrow \mathbf{1\,AU = 1{,}44\cdot 10^8\,km}$. Altså en afvigelse på 4%.
Skal man være mere omhyggelig, bør man inkludere de to baners eccentricitiet, og man skal vide, hvordan formen af banerne er fastlagt.

Ved beregning

Stellarium kan angive afstanden mellem Venus og Jorden endnu mere præcist end metoden ovenfor, og metoden gælder altid – altså også når der ikke er nedre konjunktion. For den 5/6-2012 er afstanden mellem de to planeter 0,2888AU. Med denne afstand får man følgende sammenhæng mellem den astronomiske enhed og meteren: $0{,}2888\,AU = 3{,}987\cdot 10^7\,km \Leftrightarrow 1\,AU = 1{,}38\cdot 10^8\,km$.

Bestemmelsen er altså ca. 8% for lille, og da vi har elimineret fejl i baneafstandene, så må det være vinkelmålingerne, der er skyld i afvigelsen.

Man kan også benytte almanakprogrammer til at finde afstande og et eksempel på gode computerprogrammer med tilhørende forklaringer, hvordan de virker kan man se i referencelisten. [6].

Sammenfatning

Vi har nu gennemført en bestemmelse af den astronomiske enhed. Metoden kan sammenfattes til:

1. Benyt to gode teleskoper og to gode stjerneure til at betragte en klode, f. eks. Venus, på nøjagtigt samme tidspunkt. Timevinkel og målte koordinater for kloden skal nedskrives. Har man ikke to gode observatorier, kan man f. eks. bruge Stellarium.
2. Parallaksen for kloden beregnes.
3. Ved kendskab til observationsstedernes geografiske koordinater, skal man bestemme kordelængden mellem de to observatorier samt orienteringen af denne vektor.
4. Ved kendskab til klodens timevinkel og dens rektascension, kan man finde forårspunktets placering i geografiske koordinater og dernæst klodens retningsvektor. (Deklination og breddegrad er ens.)
5. Ved hjælp af vektorregning findes vinklen mellem kordevektoren og retningsvektoren til kloden.
6. Man beregner den vinkelrette del af kordelængden i forhold til retningsvektoren til kloden.
7. Man beregner den absolutte afstand mellem Jorden og kloden.
8. Man skal dernæst finde afstanden mellem kloden og Jorden i astronomiske enheder. Er der tale om konjunktion eller opposition ved observationstidspunktet, kan man efter at have målt klodens synodiske omløbstid, anvende Keplers 3. lov til at bestemme klodens halve storakse. Da Jordens halve storakse er 1,0 AU, kan afstanden mellem de to kloder nemt bestemmes.
9. Er der ikke konjuktion/opposition, kan man anvende Stellarium eller tilsvarende program til at finde afstanden i astronomiske enheder.
10. Endelig kan den astronomiske enhed beregnes.

Når den astronomiske enhed er bestemt, kan man finde et absolut mål for grund-enheden for kosmologiske afstande i Universet, parsec'en, som er defineret som 206264,8AU = 1 pc. Da parsec'en bygger på den astronomiske enhed, er det altså af største vigtighed at få den astronomiske enhed bestemt så nøjagtigt som muligt.

Konklusion

En gymnasieelev, som går i gang med denne opgave, vil sandsynligvis betragte opgaven som værende indviklet, fordi det ofte kan være svært at visualisere rumlige strukturer. Men virkeligheden for Cassini, Halley, Hornsby, Green og alle de andre var meget værre, fordi de skulle foretage lange og farefulde rejser, før de kunne foretage observationerne. Derudover var urene ikke så gode, som i dag, så selve målingerne var meget komplekse at udføre. Endelig skulle de beregne de relative planetafstande i hånden! Det var også en kompliceret affære.

Da James Cook tog til Tahiti i 1768 for at gøre klar til Venus-passagen i 1769, vidste han udmærket, at en pæn andel af besætningen aldrig ville kom hjem igen. Det viste sig, at over halvdelen af besætningen døde undervejs, inkl. skibsastronomen Charles Green. [9]

De fleste imponeres sikkert over den iver, videnskabsmændene havde - også dengang, og deres villighed til at foretage store ofre, for at få samlet observationerne sammen. Det er nok ikke nogen overdrivelse at postulere, at datidens eventyrere var lige så dristige som nutidens astronauter, der risikerer liv og lemmer for at bibringe menneskeheden ny viden.

Historien om Jean Richers rejse til Fransk Guyana (1672-73) og Cooks rejse til Tahiti i (1768-69) er fantastiske historier, som den ivrige 3. g'er kunne tage op i en SRP-opgave.

Opgaver

Nedenstående opgaver kan løses kort eller mere omfattende. Noten, inklusive opgaverne, burde være nok til et tværfagligt forløb mellem Fysik/astronomi/historie, men man kan sagtens gå mere i dybden og overveje at skrive SRP-opgave med opgaverne som udgangspunkt.

Bestemmelse af den astronomiske enhed ved egne observationer
Bestem den astronomiske enhed ved at udvælge to observationssteder på Jorden, og udfør målinger og beregninger som vist i denne note. Du bestemmer selv hvilken klode, du vil observere. (Husk at jo tættere kloden og Jorden er på hinanden, des bedre resultater får du.)

Cassinis og Richers rejse
Find litteratur om Richers rejse til Fransk Guyana og sæt dig ind i historien. Forbered et foredrag, som du kan holde for dine klassekammerater.

James Cooks rejse
Find litteratur om James Cooks rejse til Fransk Guyana og sæt dig ind i historien. Forbered et foredrag, som du kan holde for dine klassekammerater.

Cassini
Find litteratur om Cassini og skriv en kort biografi om Cassini. Skriv derefter en artikel om en af Cassinis videnskabelige resultater.

Edmond Halley
Find litteratur om Halley og skriv en kort biografi om Halley. Skriv derefter en artikel om en af Halleys videnskabelige resultater.

Skibsfart i gamle dage
Sæt dig ind i navigation, f. eks. bestemmelse af længdegrader. Skriv en artikel om udfordringerne ved at rejse før 1800. Greenwich-observatoriets hjemmeside kan muligvis være dig behjælpelig med information.

Referencer

1. http://www-spof.gsfc.nasa.gov/stargaze/Svenus1.htm (En side, der viser hvordan E. Halley bestemte afstanden til Venus ved at betragte Venus-transitter.)
2. http://www.maa.org/pubs/mm_dec03-venus.pdf
3. T. Hornsby, ”The quantity of the Sun's parallax, as deduced from the observations of the transit of Venus, on June 3, 1769.” Philosophical Transactions of the Royal Society 61 (1771), 575-579.
4. http://astro-gym.dk Min hjemmeside, hvor udvalgte noter offentliggøres.
5. D. Scott Birney: ”Observational Astronomy,” Cambridge University Press, 1991.
6. O. Montenbruck & T. Pfleger: ”Astronomy on the Personal Computer,” Springer Verlag 1991.
7. http://Stellarium.sourceforge.net. Programmet Stellarium til at simulere observationer.
8. http://orfe.princeton.edu/~rvdb/tex/MeasureAU/ms.pdf
9. http://journals.cambridge.org/download.php?file=%2FIAU%2FIAU2004_IAUC196%2FS1743921305001262a.pdf&code=f5e0756c89691382d990e75cf703ee45