

Cepheider



**Af Michael Andrew Dolan Møller
Rosborg Gymnasium og Hf
Oktober 2017**

Indholdsfortegnelse

Cepheider.....	3
Introduktion.....	3
Størrelsesklassebegrebet.....	3
Afstandsbestemmelse.....	4
HR-diagrammet.....	6
κ -mekanismen.....	7
Cepheiders indre karakteristika.....	7
Sammenfatning.....	8
Andre Cepheidetyper.....	9
Eksempel - δ Ceph.....	9
Referencer.....	11

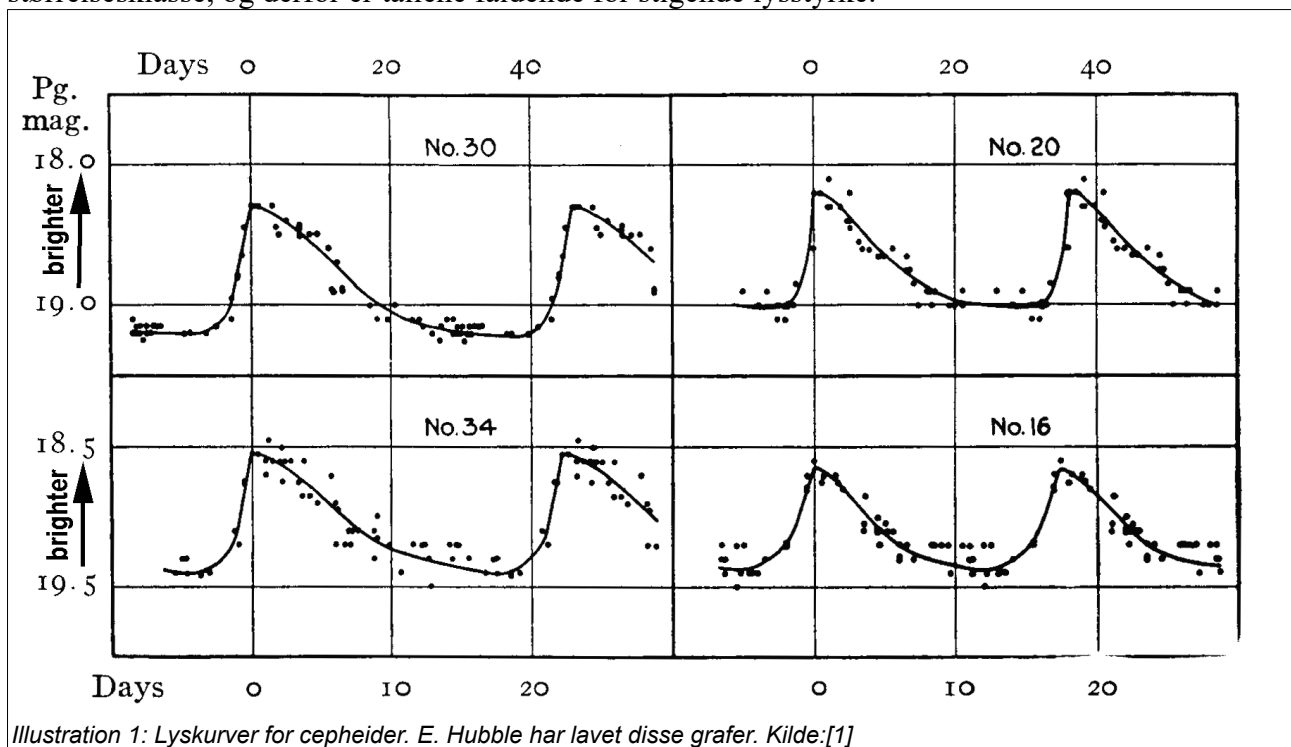
Cepheider

Introduktion

Mange (alle?) stjerner pulserer på en eller anden måde. En bestemt klasse af pulserende stjerner kaldes for cepheider. De er opkaldt efter δ Ceph, som var den anden fundne stjerne af den type pulsering. Den først fundne cepheide-stjerne hedder η Aql, og den blev opdaget af Edward Pigott 10/9-1784. Den anden opdagelse af δ Ceph blev kort tid efter opdaget af John Goodricke. Det er denne type cepheider, som beskrives i denne note.

Henrietta S. Leavitt opdagede i 1908 ved at observere cepheider i ca. samme afstand, at deres tilsyneladende gennemsnitslysstyrke, m , og deres periode, P , hang sammen på en simpel måde. 4 år senere kom den danske astronom Ejnar Hertzsprung med den første kalibrering af periode og absolutte gennemsnitslysstyrke, M .

En typisk lyskurve for en cepheide ser ud som på illustration 1. 2. akse viser den tilsyneladende størrelsesklasse, og derfor er tallene faldende for stigende lysstyrke.



Cepheider lyser ganske voldsomt, og derfor er de velegnede til at finde afstande til meget fjerne galakser. Derfor vil vi nedenfor gennemgå nogle formler, der gør det muligt at bestemme afstande til cepheider.

Størrelsesklassebegrebet

Hipparchus observerede stjerner og opdagede, at de ikke lyser lige kraftigt. Han indførte derfor 6 størrelsesklasser, for at kvantificere stjernernes lysstyrke. De kraftigste stjerner fik tildelt størrelsesklassen 1, mens de svageste fik størrelsesklassen 6. Altså, jo større størrelsesklasse, des svagere lys fra stjernen.

Da kameraet blev opfundet (og kikkerten også var introduceret af Galilei) reviderede Norman Pogson størrelsesklassebegrebet, og hans definition gælder i dag. Han definerede at forholdet mellem to stjerners målte intensiteter (også kaldet tilsyneladende luminositet) afhænger eksponentielt af deres målte størrelsesklasser. Grunden til, at man får en sådan funktion er, at hjernen opfatter lys på en logaritmisk måde. Formlen lyder

$$\frac{l_1}{l_2} = 2,5119^{m_2 - m_1}.$$

Den absolutte luminositet, L , af en stjerne hænger sammen med den tilsyneladende luminositet via afstandskvadratloven. Skrevet som formel $l = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot d^2}$.

Ovenfor er d afstanden til stjernen.

Man definerer den *absolutte bolometriske størrelsesklasse*, M , som den målte *tilsyneladende størrelsesklasse*, hvis man er i afstanden 10 pc. (1 pc = $3,086 \cdot 10^{16}$ m.) Dvs. $M = m(10 \text{ pc})$. Denne definition kan bruges til at sammeknytte m , M og d i én formel. Hvis man måler m og på anden vis kan finde M , kan man altså bestemme afstanden til en stjerne.

Afstandsbestemmelse

Vi forestiller os at observere en stjerne, og vi ønsker at finde dens afstand. Vi benytter definitionen af størrelsesklasse, afstandskvadratloven samt definitionen af absolut størrelsesklasse. Det giver

$$\begin{aligned} l(d) &= \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot d^2} \wedge l(10 \text{ pc}) = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot (10 \text{ pc})^2} \wedge \frac{l(10 \text{ pc})}{l(d)} = 2,5119^{m-M} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{d}{10 \text{ pc}}\right)^2 &= 2,5119^{m-M} \Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{d}{10 \text{ pc}}\right)^2\right) = (m-M) \cdot 0,4 \Leftrightarrow \\ 2 \cdot \log(d) - 2 &= (m-M) \cdot 0,4 \Leftrightarrow \\ \mathbf{5 \cdot \log(d) - 5} &= \mathbf{m - M}. \end{aligned}$$

Ovenfor er det underforstået, at enheden for d er pc. Det er principielt en simpel sag at måle m , så hvis vi kan finde M for stjernen, så kan vi straks bestemme dens afstand d under forudsætningen af, at der ikke er interstellar absorption mellem os og stjernen.

Øvelse

- Gennemgå beregningerne ovenfor i detalje.
- Isoler afstanden d i den sidste formel.

I dag er den accepterede sammenhæng mellem den gennemsnitlige absolutte størrelsesklasse, \bar{M} , og cepheidens periode P , målt i døgn, til $\bar{M}_V = -2,78 \cdot \log(P(d)) - 1,35$. (Kilde: ESA/ESO-exercises eller [5].)

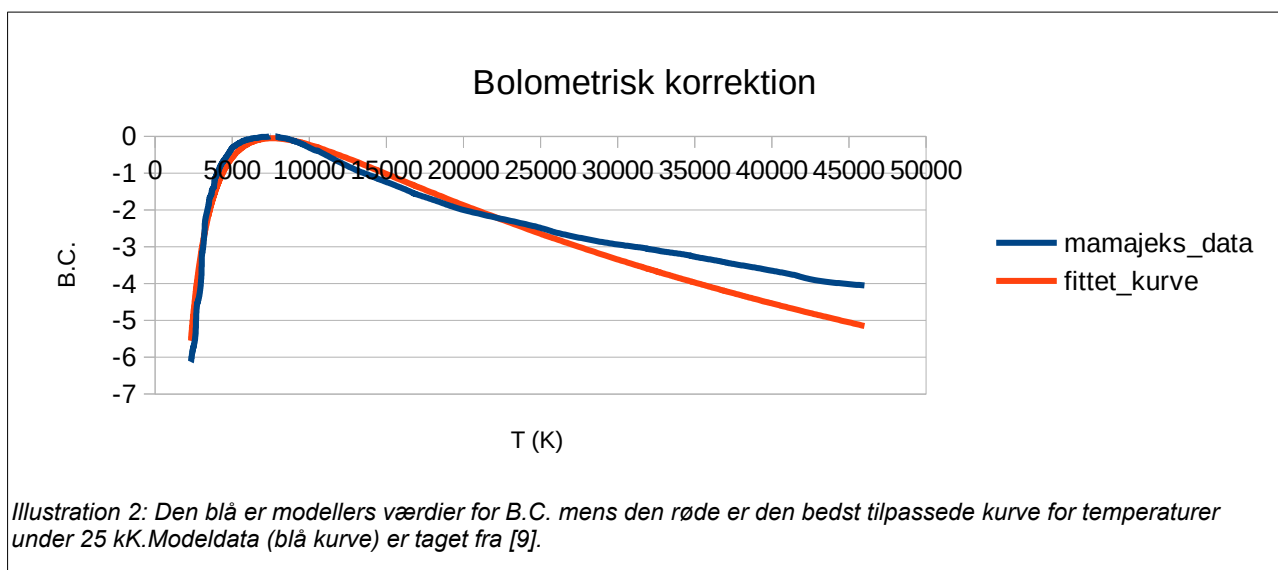
Indeks V betyder, at størrelsesklassen gælder i V -båndet, som er et grønt filter, man kan lægge foran sin detektor. Man skal altså også måle m_V , (man kalder også m_V for ' V ') for at beregne afstanden d .

Hvis man ønsker at bestemme stjernes absolutte luminositet, skal man bruge M og ikke M_V . Man kan beregne M ved hjælp af formelen $M_{\text{bol}} = M_V + \text{B.C.}$ og B.C. kan beregnes, når man kender temperaturen. Se formel (3). [4] B.C. kaldes for *den bolometriske korrektion* og den omtales nedenfor.

M er altså et mål for *al* den strålingsenergi, som stjernen udsender, mens M_V er et mål for den strålingsenergi, som opfanges i et bestemt bølgelængdeområde. Når vi måler lyset fra stjernen, er der sket absorption i kikkertoptikken samt i atmosfæren. Stjerner lyser i vidt forskellige bølgelængdeintervaller, da bølgelængdefordelingen af lyset afhænger stærkt af stjernernes temperaturer. En CCD-detektor, som måler det indkomne lys, er heller ikke lige følsom i alle bølgelængdeområder. Derfor måler vi ikke M direkte.

I praksis måler man stjernens tilsyneladende størrelsesklasse gennem forskellige farvefiltre. Et system er UBVRI-systemet. (Ultraviolet, Blå, Visuel, Rød, Infrarød.) Foruden at måle gennem disse filtre, måler man på en række standardstjerner, som har kendte størrelsesklasser i de forskellige farvebånd. Derved kan man kalibrere sit udstyr, så man uanset udstyr får ensartede størrelsesklasser i de forskellige farvebånd.

For at finde størrelsesklassen for alle bølgelængder, skal man benytte den tidligere nævnte størrelse, B.C., *den bolometriske korrektion*, som skal adderes til V-størrelsesklasserne. Den bolometriske korrektion afhænger kraftigt af stjernens temperatur, så den varierer fra stjerne til stjerne - og man skal altså have et mål for stjernens temperatur. Den kan findes, hvis man har målt både B- og V-størrelsesklassen.



Det viser sig, at temperaturen er givet ved formlen

$$T = \frac{8540 \text{ K}}{(B - V) + 0,865} \cdot [8]$$

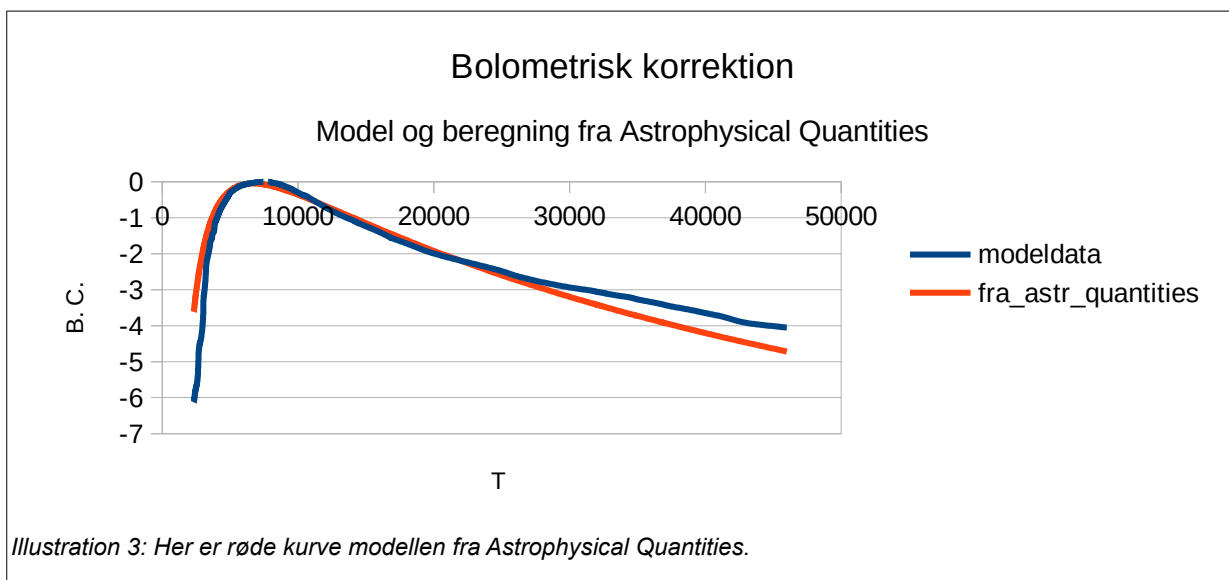
Den bolometriske korrektion er i *Astrophysical Quantities* [4] givet ved udtrykket

$$B.C. = 42,54 - 10 \cdot \log(T_{\text{eff}}) - \frac{29000}{T_{\text{eff}}}$$

Hvis man er interesseret i temperaturområdet omkring cepheiderne, som vi jo er, er nedenstående formel mere præcis.

$$B.C. = 44,8 - 9,96 \cdot \log(T) - 2,60 \cdot \log\left(\frac{T}{5800 \text{ K}}\right) - \frac{27300 \text{ K}}{T^{0,945}}$$

Illustration 2 og 3 viser de to modelkurver.

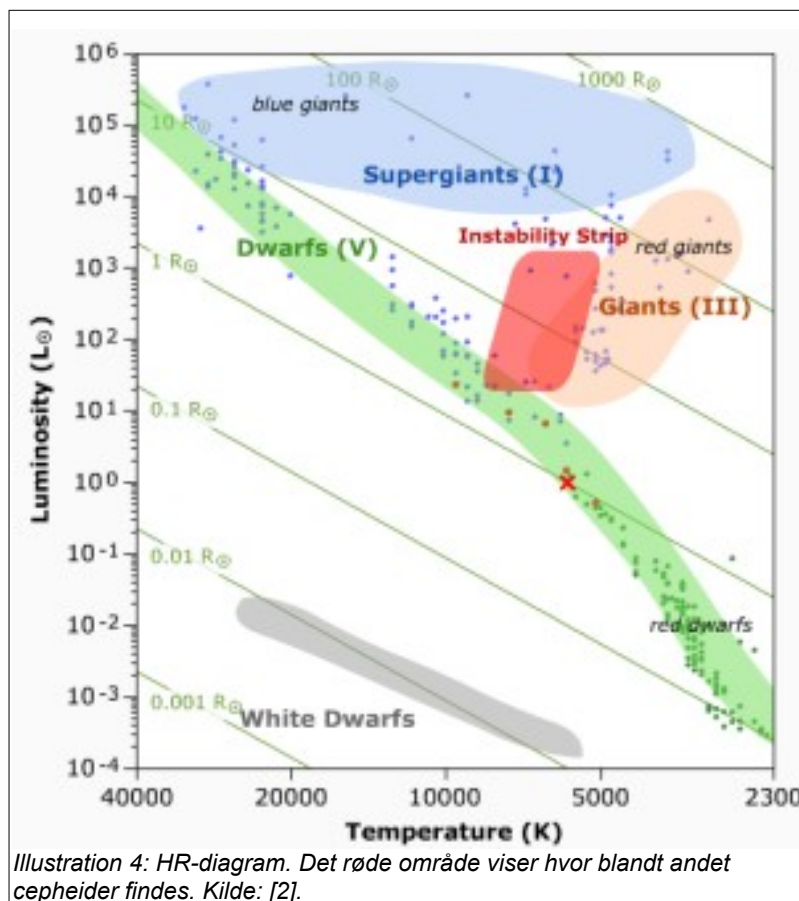


HR-diagrammet

Et Hertzsprung-Russell-diagram, forkortet HR-diagrammet, er f. eks. en $(T, \log(L))$ -kurve, hvor T er stjernens overfladetemperatur og L er stjernens absolutte luminositet - også kaldet dens effekt. Det viser sig, at stjernerne placering i dette diagram siger en del om, hvad der foregår inde i dem. På den såkaldte hovedserie, som er markeret med grønt i illustration 4, foregår der hydrogen-fusion i stjernernes indre, mens der i gigantfaserne foregår helium-fusion.

Man kan finde cepheiderne i det såkaldte ustabilitetsspor, og stjernerne er alle forsvundet fra hovedserien. Se illustration 4. Der findes flere typer Cepheider, men her vil vi kun betragte de klassiske typer af population I-stjerner.

Cepheiderne ligger i toppen af det røde område, dvs. de har temperaturer i intervallet $\sim 6-10$ kK og deres middellradier er i intervallet $\sim 10-200$ solradier.



κ -mekanismen

Grunden til, at disse stjerner pulserer, skyldes en speciel mekanisme, som kaldes κ -mekanismen.

I cepheiden findes et lag af ioniseret helium. Enkelt ioniseret helium, He^+ , har en god evne til at lade lys passere, mens dobbeltioniseret helium, He^{2+} er ganske uigennemtrængeligt for stråling.

Når stjernen har sin mindste radius, er den varmest. Derfor er der energi nok til at dobbeltionisere helium. Lyset kan ikke særlig godt trænge igennem dette plasma, og det udadgående strålingstryk stiger derfor voldsomt. På et tidspunkt vil strålingstrykket overstige det nedadgående tryk fra gassen, der ligger over det ioniserede helium-område, og derfor vil stjernen udvide sig ret hurtigt.

Når en gas udvider sig, afkøles den. Derfor vil stjernens temperatur aftage under ekspansionen, og en del af de dobbeltioniserede helium-atomer vil rekombinere med mindst en elektron. Derfor vokser gennemskinneligheden, og sollyset kan derfor undslippe stjernen. Den har altså en stor udstråling. Pga. den afgivne strålingsenergi falder strålingstrykket og det indadgående tryk fra gravitationen bliver atter størst - stjernen trækker sig sammen. Så stiger temperaturen igen, og der kommer flere dobbeltioniserede helium-atomer, og det hele starter forfra.

For at der kan blive varmt nok i stjernens ydre dele til at dobbeltionisering af helium kan forekomme, skal stjernen have en vis størrelse. Det viser sig, at Solen er for let, så den vil aldrig opleve en periode som cepheide.

Cepheiders indre karakteristika

Det er også lykket at finde en sammenhæng mellem en cepheides middelradius, R , og dens periode. Denne relation lyder $\log\left(\frac{\bar{R}}{R_{\odot}}\right) = 0,680 \cdot \log(P(d)) + 1,146$. [3]. Det er tydeligt at se, at selv for kortperiodiske cepheider, er deres radier væsentligt større end Solens radius. De er kæmpestjerner, hvad vi jo i forvejen vidste udfra deres placering i HR-diagrammet.

Vi kan bruge Pogsons definition af størrelsesklasser til at finde cepheiders middeltemperatur og gennemsnitlige absolutte luminositet ved at sammenligne med en kendt stjernes værdier - for eksempel for Solen.

Solens absolutte luminositet $L_{\odot} = 3,846 \cdot 10^{26}$ W, dens absolutte størrelsesklasse $M_{\odot} = 4,78$ og dens effektive¹ temperatur $T_{\odot} = 5,8$ kK.

Først starter vi med at finde en relation mellem to stjerners absolutte størrelsesklasser og luminositeter.

$$l_1 = \frac{L_1}{4 \cdot \pi \cdot d_1^2} \wedge l_2 = \frac{L_2}{4 \cdot \pi \cdot d_2^2} \wedge \frac{l_1}{l_2} = 2,5119^{m_2 - m_1} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{L_1}{4 \cdot \pi \cdot d_1^2}\right)}{\left(\frac{L_2}{4 \cdot \pi \cdot d_2^2}\right)} = 2,5119^{m_2 - m_1} \Leftrightarrow \left(\frac{L_1 \cdot d_2^2}{L_2 \cdot d_1^2}\right) = 2,5119^{m_2 - m_1} \Leftrightarrow \frac{L_1}{L_2} = 2,5119^{M_2 - M_1}.$$

¹ Den effektive temperatur forstås som den temperatur, der giver det bedste Planckkurvefit til stjernespektret. For Solens vedkommende har den denne temperatur nogle hundrede km nede i fotosfæren.

Ved sidste beregning ovenfor, har vi sat afstandene mellem de to stjerner til 10 pc, og dermed kan vi indsætte deres absolutte størrelsesklasser på m_1 og m_2 's pladser. Bemærk, at i formlen ovenfor skal *den bolometriske størrelsesklasse* indsættes. Den bolometriske størrelsesklasse er et mål for den samlede lysudsendelse fra stjernen, mens M_V kun dækker lyset, der kan passere det grønne (visuelle) filter. Sammenhængen mellem de to størrelsesklasser er $M_{bol} = M_V + B.C.$, hvor B.C. er en korrektionsfaktor. Faktoren er negativ. Den kan beregnes, eller man kan slå den op i et opslagsværk.

Øvelse

Gennemgå beregningerne ovenfor i detalje.

Hvis man anvender Solens værdier får man følgende sammenhæng for cepheidens absolutte lysstyrke $L = 2,5119^{4,78-M} \cdot L_{\odot}$.

Endelig kan man, hvis man ikke har målt B-V, benytte Stefans lov $\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$ til at beregne stjernens overfladetemperatur.

Sammenfatning

Formlerne til at finde størrelsesklasse, afstand, radius, luminositet og temperatur er sammenfattet nedenfor.

$$\text{Absolut størrelsesklasse: } \overline{M}_V = -2,78 \cdot \log(P(d)) - 1,35. \quad (1)$$

$$\text{Bolometrisk størrelsesklasse M: } M_{bol} = M_V + B.C. \quad (2)$$

$$\text{Bolometrisk korrektion: } B.C. = 42,54 - 10 \cdot \log(T_{eff}) - \frac{29000}{T_{eff}} \quad \text{eller} \quad (3)$$

$$B.C. = 44,8 - 9,96 \cdot \log(T) - 2,60 \cdot \log\left(\frac{T}{5800 K}\right) - \frac{27300 K}{T^{0,945}}$$

$$\text{Stjernes temperatur } T = \frac{8540 K}{(B-V) + 0,865} \quad (4)$$

$$\text{Afstand: } d = 10^{\left(\frac{m-M+5}{5}\right)} \text{ pc} \quad (5)$$

$$\text{Absolut lysstyrke i middel: } L = 2,5119^{4,78-M_{bol}} \cdot L_{\odot} \quad (6)$$

$$\text{Gennemsnitsradius: } \log\left(\frac{\overline{R}}{R_{\odot}}\right) = 0,680 \cdot \log(P(d)) + 1,146 \quad (7)$$

$$\text{Gennemsnitstemperatur: } \frac{T}{T_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{fra } L = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (8)$$

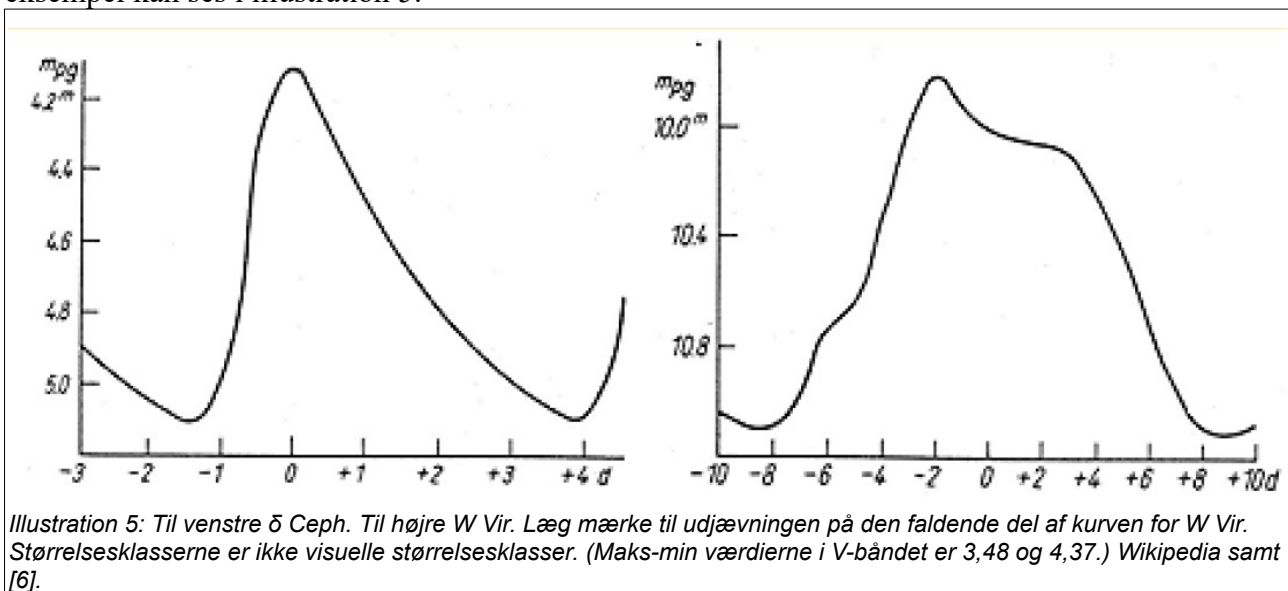
Andre Cepheidetyper

De cepheider, som er dækket af ovenstående beskrivelse er alle stjerner af typen population I, dvs. det er stjerner, som har et stort indhold, Z , af tungere grundstoffer. Her betyder 'stort' at $Z = 0,01-0,02$. (Z er procentdelen af stjernens masse, der består af grundstoffer tungere end helium.)

Hvis stjernen er en population II-stjerne har den et metalindhold, der er ca. en tiendedel af indholdet for population I-stjerner. Det giver sig også til kende i dens pulsationshastighed. Formlen bliver der

$$\overline{M}_V = -2,78 \cdot \log(P(d)) + 0,1. \quad [5] \ \& \ [6].$$

For samme periode lyser de altså ca. 1,5 størrelsesklasse svagere. Man kalder cepheider af denne type for W Vir stjerner. Man kan skelne de to cepheidetyper ved at undersøge deres lyskurver. Et eksempel kan ses i illustration 5.



Endelig findes der også δ Scu-stjerner, RR Lyrae stjerner. Dem kan man læse mere om i [7].

Eksempel - δ Ceph

I illustration 5 kan man se en lyskurve for δ Ceph. Perioden er $5,366^d$. Middelstørrelsesklassen m aflæses til $\overline{V} = (3,48+4,37)/2 = 3,93$. Ud fra disse oplysninger kan vi nu beregne følgende størrelser:

$$\overline{M}_V = -2,78 \cdot \log(5,366) - 1,35 = -3,38.$$

$$\text{Afstanden til stjernen er } d = 10^{\left(\frac{3,93 - (-3,38) + 5}{5}\right)} \text{ pc} = 289 \text{ pc}.$$

$$\text{Stjernens middelradius er } \overline{R} = R_{\odot} \cdot 10^{0,680 \cdot \log(5,366) + 1,146} \cdot R_{\odot} = 43,9 \cdot R_{\odot} = 3,05 \cdot 10^{10} \text{ m} = 0,20 \text{ AU}.$$

For at finde temperaturen og den absolutte luminositet skal vi løse ligningerne (2), (3), (6), (8) mht T og L . (Hvis vi havde B , kunne (4) og anvendes til at finde T .)

$$4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 = 2,5119^{4,78-M} \cdot L_{\odot} \wedge M = -3,38 + \left(42,54 - 10 \cdot \log(T) - \frac{29000 \text{ K}}{T}\right).$$

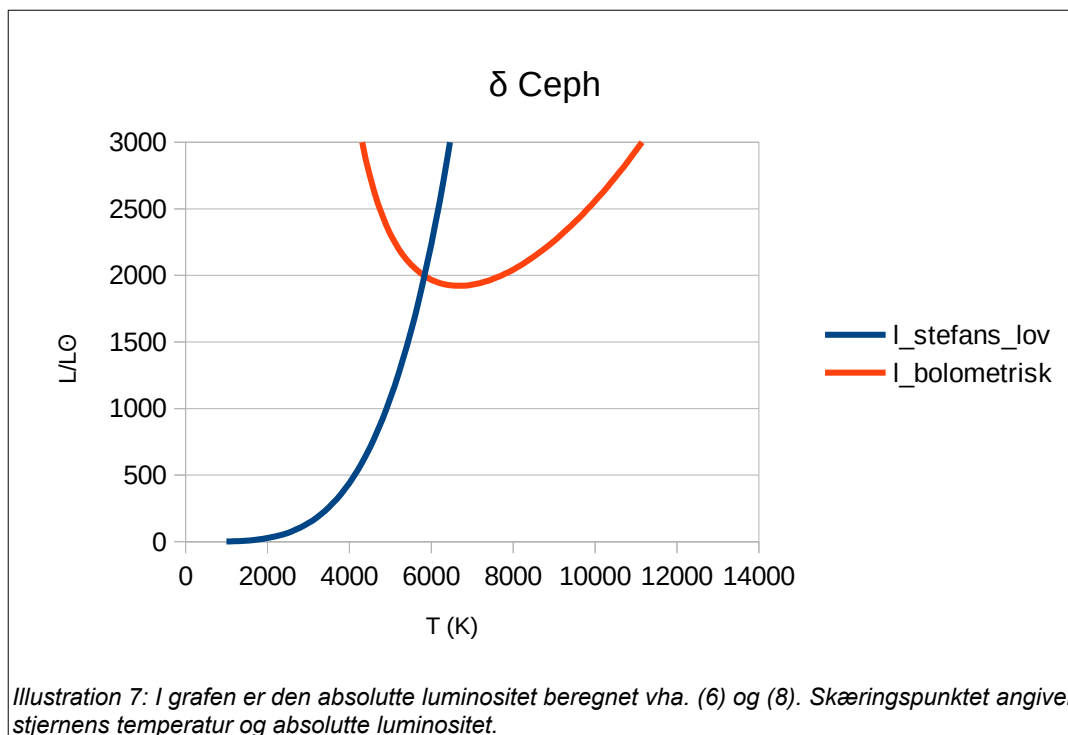
Man kan løse ligningerne grafisk eller i et godt CAS-værktøj. TI nSpire kan ikke beregne den rigtige løsning, så der laves i stedet for et regneark indeholdende kolonnerne, T, M samt beregningerne for (5) og (7). Herunder er der et eksempel på tabellen og i illustration 7 er grafen tegnet efter at 2. aksens værdier er blevet korrigeret.

T	M	$L = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{L_{\odot}}$	$L = 2,5119^{4,78-M}$	ΔL_{rel}
1000	-19,84	1,72338902020081	7047867922,05632	4089539760

Illustration 6: Både 3.- og 4. kolonne er målt i enheder af Solens absolutte luminositet.

Dermed får man en *middeltemperatur* på $\bar{T} = 5,84$ kK og en *middelluminositet* $\bar{L} = 2,0$ kL_⊙.

Ud fra resultaterne er det tydeligt at se, at cepheiden er enorm i forhold til Solen, både mht. middelfradius og absolut luminositet. Det er derfor, at cepheider er så nyttige, når man skal bestemme kosmologiske afstande.



Øvelse. Strålingsvariationen for δ Cep.

Antag at cepheidens temperatur ikke varierer ret meget, så du kan sætte den til $T=5,84$ kK.

- Beregn den bolometriske korrektion.
- Find den tilsyneladende visuelle størrelsesklasse, når stjernen lyser kraftigst.
- Beregn den bolometriske størrelsesklasse.
- Beregn cepheidens maksimaludstråling. Sammenlign med middelluminositeten.
- Hvor meget ændrer stjernens radius sig?

Ovenstående overslag ændrer sig naturligvis, hvis man inkluderer den temperaturvariation stjernen gennemgår.

Referencer

1. <http://ircamera.as.arizona.edu/Astr2016/lectures/galaxies.htm>.
2. http://astro.unl.edu/naap/hr/hr_background3.html
3. Ap. J, **512**, 553-557, 1999. Gieren et al. *Calibrating the Cepheid Period-Radius Relation with Galactic and Magellanic Cloud Cepheids.*
4. C. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, 3rd edition, Athlone Press, 1974.
5. <https://academic.oup.com/mnras/article/308/4/969/1030435/Direct-calibration-of-the-Cepheid-period>.
6. Hoffmeister et al, 1985, *Variable Stars*. (<http://www.aavso.org/files/vsots/spring03.pdf>)
7. Kurtz et al, *Asteroseismology*, Springer Verlag 2010.
8. http://www.astro.sunysb.edu/fwalter/AST443/b-v_temp.html
9. The Astrophysical Journal Supplement, Volume 208, Issue 1, article id. 9, 22 pp. (2013).
10. Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics.



Illustration 8: Pickerings computere. Henrietta Swan Leavitt sider under grafen på væggen. [10].