Nebulaer

I denne opgave, skal du finde egenskaber ved en instellar gassky. Dertil kræves kendskab til nogle formler, som er beskrevet nedenfor. Er matematik ikke din stærke side, kan du løse opgave 1 ved at bruge formlerne (3)-(5), uden at det er nødvendigt at læse baggrunden for dem.

Formålet med opgaven er at se, hvordan man kan finde egenskaber ved astronomiske objekter, ved at sammenkæde målinger og matematisk analyse.

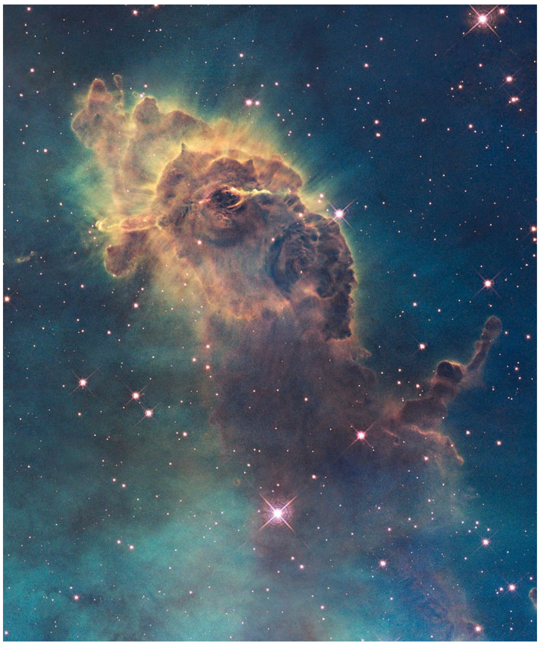
Illustration 1: Et billede af Carinatågen. Kilde: NASA, ESA, and the Hubble SM4 ERO Team

Nødvendige formler

Masseprocenter

Definitionen på en masseprocent, η, kan skrives som

$$\eta_i = \frac{M_i}{M} \cdot 100\,\%,$$

hvor M_i angiver massen af den i'te isotop af i alt n isotoper og M er totalmassen. Eftersom $M_i = N_i \cdot m_i$, hvor m_i, er isotopmassen af det i'te element, kan vi omskrive formlen til

$$\eta_i = \frac{N_i \cdot m_i}{M} \cdot 100\,\%. \tag{1}$$

Middelatommassen for grundstoffet skriver vi som <*m*>, og det er den, vi ønsker at finde. Det samlede antal kerner, N, i prøven kan skrives som

$$N = \frac{M}{\langle m \rangle} = \sum_{i=0}^{n} N_i. \tag{2}$$

Dvs. ved at isolere N_i i (1) og indsættelse i (2) får man

$$N = \frac{M}{\langle m \rangle} = \sum_{i=0}^{n} N_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\eta_i \cdot M}{m_i \cdot 100\,\%} \Leftrightarrow \frac{1}{\langle m \rangle} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\eta_i}{m_i \cdot 100\,\%} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\langle m \rangle = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\eta_i}{m_i \cdot 100\,\%} \right)^{-1}}. \tag{3}$$

Herover skal man huske at indsætte η_i i procent.

Virialteoremet

Et fysisk system overholder ofte det såkaldte virialteorem, som siger, at $2\cdot E_{kin}+E_{pot}=0$. Du kan læse mere om den regel på Wikipedia eller i en 3. g fysikbog.

I en gassky er den gennemsnitlige potentielle energi[1] af en enkelt partikel $E_{pot}=\frac{-3\cdot G\cdot M\cdot <m>}{5\cdot R}$, hvor G er Cavendish' konstant, M er skyens samlede masse, R er dens radius og $<m>$ er den gennemsnitlige partikelmasse. Partiklens gennemsnitlige kinetiske energi[2] er $E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot <m>\cdot v^2=\frac{3}{2}\cdot k_B\cdot T$, hvor k_B er Boltzmanns kosntant og T er middeltemperaturen af gassen.

Hvis man indsætter udtrykkene for kinetisk- og potentiel energi i virialteoremet får man

$$2\cdot\frac{3}{2}\cdot k_B\cdot T-\frac{3\cdot G\cdot M\cdot <m>}{5\cdot R}=0\Leftrightarrow$$

$$M\approx\frac{5\cdot k_B\cdot T\cdot R}{G\cdot <m>} \tag{4}$$

Man kan bruge Stefan-Boltzmanns lov $L=4\cdot\pi\cdot R^2\cdot\sigma\cdot T^4$ samt (4) til at finde et mål for skyens luminositet:

$$L=\frac{4\cdot\pi\cdot\sigma}{625\cdot R^2}\cdot\left(\frac{G\cdot M\cdot <m>}{k_B}\right)^4 \tag{5}$$

Ovenfor er σ Stefan-Boltzmanns konstant, som ligesom for de øvrige konstanter, kan findes bagest i astronomibogen.

Opgave 1. Interstellar sky CB 244

Satellitten Herschel har målt på den interstellare sky CB 244. Vi antager, at skyens sammensætning er som vist i tabellen nedenfor.

Gasart	**Masseprocent**	**Atommasse (u)**
H	75,000	1,007
He	24,000	4,0026
”Resten”	1,0000	115

1 Se side 4 for en beregning af denne formel.
2 Se side 4 for en beregning af denne formel.

a) Vis at middelatommassen, <*m*>, for skyen er 1,24 u.

En temperaturmåling fra satellitten på skyen kan ses på illustrationen nedenfor.

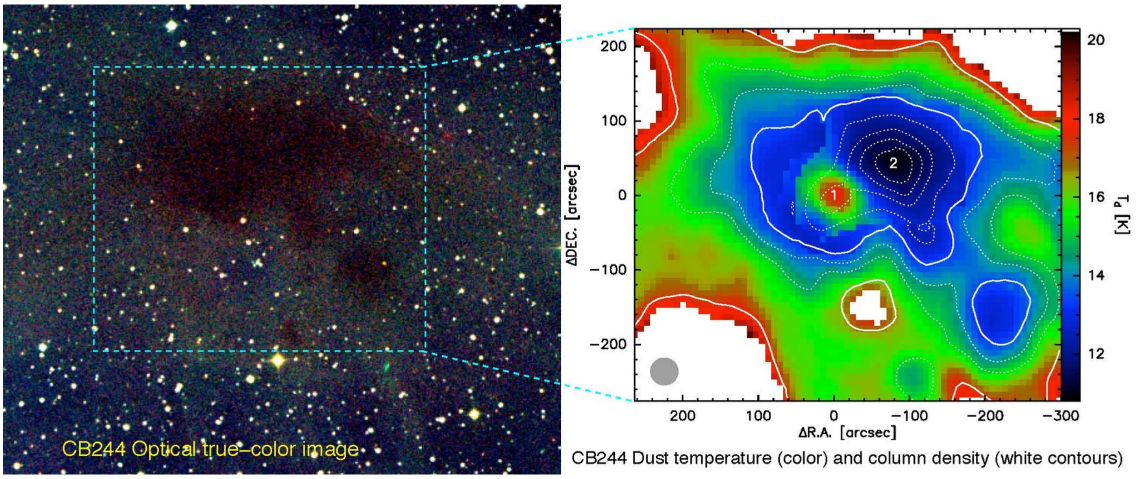

Illustration 2: Skyen CB 244. Kilde: ESA.

Billedet til venstre er et optisk billede og billedet til højre er et temperaturkort. Vi betragter område 2 på kortet.

b) Aflæs middeltemperaturen af område 2.
c) Vurder skyens radius i område 2, idet det oplyses, at CB 244 er 200 pc væk.
d) Beregn skyens masse. (ESA oplyser, at de vurderer massen til at være 3-7 solmasser.)
e) Beregn luminositeten af skyen.
f) Benyt Wiens lov til at finde maksimalbølgelængden af skyens lys.

Du kan læse mere om opdagelsen på nedenstående link.

https://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Herschel/Herschel_takes_the_temperature_of_an_interstellar_cloud

Formlen for den potentielle energi

Her udledes formlen for den potentielle energi af en sfærisk symmetrisk og homogen gassky.

Man inddeler en kugle i en serie kugleskaller, som hver har massen $dm(r)=4\cdot\pi\cdot r^2\cdot dr\cdot\rho$, hvor r er radius af skallen og ρ er densiteten af gassen. Skallen påvirkes af den masse, $M(r)=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot\rho$, der ligger under r. Newtons 2. teorem fortæller, at bidraget fra gasskyens masse over kugleskallen midler ud. Dvs. den potentielle energi af masseskallen og massen indenfor r er

$$dE_{pot}=\frac{-G\cdot M(r)\cdot dm(r)}{r}$$

Hvis man integrerer op til skyens radius R får man

$$E_{pot}(R)=-G\cdot\int_0^R\frac{M(r)\cdot dm(r)}{r}=-G\cdot\int_0^R\frac{4\cdot\pi\cdot r^3\cdot\rho\cdot4\cdot\pi\cdot r^2\cdot\rho}{3\cdot r}\cdot dr=\frac{-G\cdot(4\cdot\pi\cdot\rho)^2}{3}\cdot\int_0^R r^4\,dr\Leftrightarrow$$

$$E_{pot}=\frac{-G\cdot(4\cdot\pi\cdot\rho)^2\cdot R^5}{5.}$$

Densiteten af en homogen sfære er $\rho=\frac{M}{V}=\frac{3\cdot M}{4\cdot\pi\cdot R^3}$, som indsættes i formlen ovenfor, og det giver $E_{pot}(R)=\frac{-3\cdot G\cdot M^2}{5\cdot R}$. Antallet af partikler i skyen er $N=\frac{M}{<m>}$. Dermed kan den potentielle energi pr. partikel findes ved division

$$E_{pot}=\frac{-3\cdot G\cdot M\cdot <m>}{5\cdot R}. \tag{6}$$

Formlen for den kinetiske energi

Her udledes formlen for den kinetiske energi af en partikel i en gassky med temperaturen T.

Maxwell og Boltzmann fandt, at for en gas i ligevægt, så har partiklerne hastigheder, der er fordelt på en bestemt form. Man kan skrive *sandsynligheden* for at en partikel har farten v som følger

$$f(v)dv=4\cdot\pi\cdot\left(\frac{<m>}{2\cdot\pi\cdot k_B\cdot T}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot v^2\cdot e^{\frac{-<m>\cdot v^2}{2\cdot k_B\cdot T}}\,dv \tag{7}$$

Dvs. vi kan finde gennemsnittet af hastighedskvadratet som følgende integral

$$<v^2>=\int_0^\infty v^2\cdot f(v)\,dv. \tag{8}$$

Hvis man definerer $x=\sqrt{\frac{<m>}{2\cdot k_B\cdot T}}\cdot v$, får man ved substitution i (8)

$$<v^2>=4\cdot\pi\cdot\left(\frac{<m>}{2\cdot\pi\cdot k_B\cdot T}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{2\cdot k_B\cdot T}{<m>}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot k_B\cdot T}{<m>}}\int_0^\infty x^2\cdot e^{-x^2}dx=\frac{3\cdot k_B\cdot T}{<m>}\Leftrightarrow$$

$$E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot<m>\cdot<v^2>=\frac{3}{2}\cdot k_B\cdot T. \qquad (9)$$