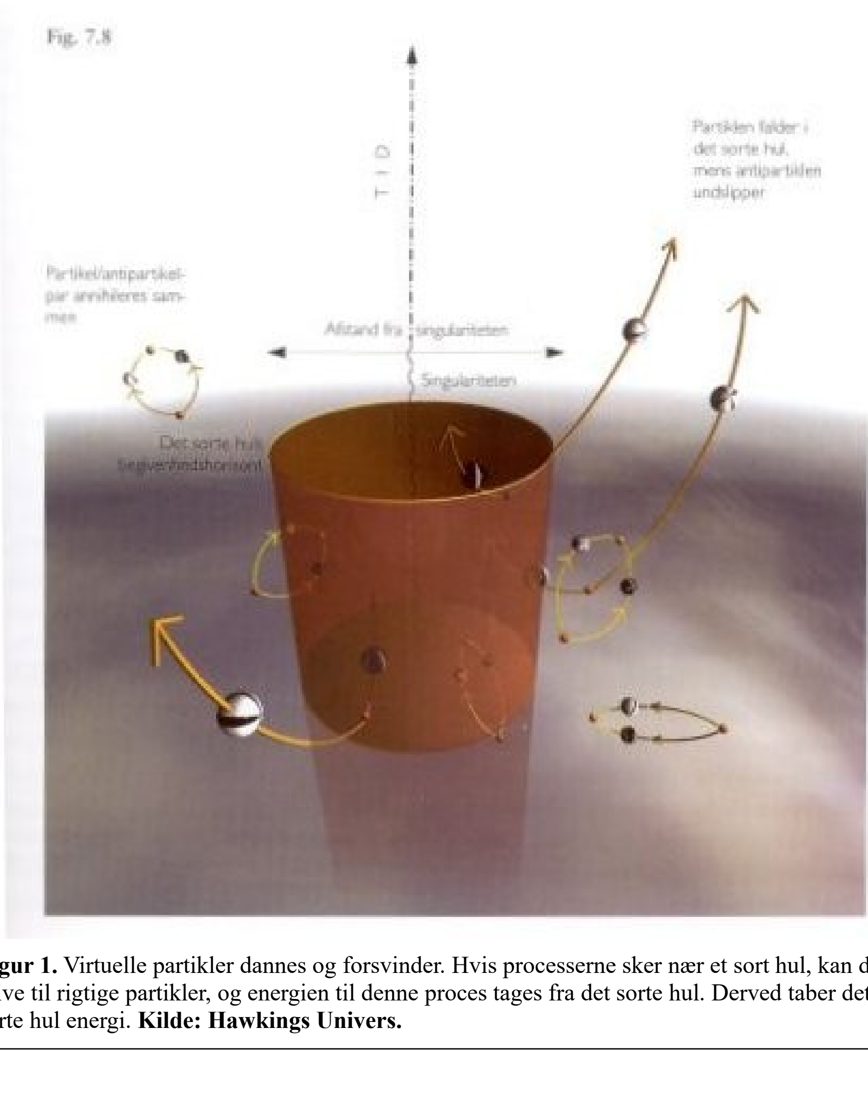
Fordampning af sorte huller

Sorte huller dannes ved supernovaeeksplosioner af stjerner, der vejer mere end ca. 15 solmasser. Selve den del af en stjernes masse, der skal bruges til at lave det sorte hul, behøver dog ikke veje mere end ca. 3-4 solmasser.

Eftersom intet energi/stof kan slippe væk fra de sorte huller, skulle man umiddelbart forvente, at sorte hullers skæbne må være at eksistere i resten af Universets levetid. Sådan en (klassisk) tankegang er imidlertid nok ikke rigtig. Kvantemekanikken åbner op for nye muligheder. For eksempel viste Werner Heisenberg, at der på små skalaer, gælder en regel, man kalder *usikkerhedsrelationen.* På formelsprog er usikkerhedsrelationen: $dE \cdot dt > h/(4\pi)$.

I ord betyder usikkerhedsrelationen, at en partikels energi er målt med en usikkerhed angivet som dE, og usikkerheden på målingens tidspunkt er angivet som dt. De to usikkerheder ganget sammen overskrider værdien, $h/(4\pi) = 5{,}27 \cdot 10^{-35}$ J·s. Hvis man betragter et punkt i rummet til et ganske bestemt tidspunkt med dt gående mod nul, vil punktets energi altså have en voksende usikkerhed. Der kan altså være energi i punktet. Da energi og masse er ækvivalente størrelser, kan der altså dannes partikler i uhyre korte tidsrum. Disse partikler kaldes for virtuelle partikler. Normalt vil de forsvinde igen nærmest øjeblikkeligt, men hvis de opstår i nærheden af et sort hul, kan den ene virtuelle partikel smutte ned i det sorte hul, mens den anden slipper væk. Energien til processen kan ikke komme af ingenting, og den bliver taget fra det sorte hul. Derfor lyser sorte huller som



Figur 1. Virtuelle partikler dannes og forsvinder. Hvis processerne sker nær et sort hul, kan de blive til rigtige partikler, og energien til denne proces tages fra det sorte hul. Derved taber det sorte hul energi. **Kilde: Hawkings Univers.**

absolutte sorte legemer (Planckstråling), og derfor er det muligt for sorte huller at fordampe.

Stephen Hawking har regnet på problemet, og resultaterne kan man se nedenfor.

Temperaturen af et sort legeme med massen M, fandt Hawking til at være givet ved formlen $T = 1{,}230 \cdot 10^{23}$ K·kg/M. Vi kan dermed beregne luminositeten af det sorte hul vha. Stefans-Boltzmanns strålingslov:

$$L = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot \left(1{,}230 \cdot 10^{23}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{kg} \cdot M^{-1}\right)^4 \qquad (1)$$

Vi mangler et udtryk for radius af det sorte hul. Hertil kan vi benytte os af nogle resultater fra mekanikken. En partikel, som netop er fri, har en mekanisk energi på 0. Dvs. følgende må gælde:

$$E_{mek} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \Leftrightarrow$$
$$R = \frac{2 \cdot G \cdot M}{v^2} \to \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} \; \textit{for } v \to c.$$

Ovenfor er c er lysets hastighed. Her burde man regne relativistisk, men heldigvis går det i dette tilfælde godt med den klassiske fysik. Hvis *R* bliver mindre end beregnet ovenfor, vil den mekaniske energi være negativ, og så er partiklen bundet til det sorte hul. Man kalder *R* for *Schwarzschildradius*.

Indsættes udtrykket for *R* i (1) får man:

$$L = 4 \cdot \pi \left(\frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}\right)^2 \cdot \sigma \cdot \left(1{,}230 \cdot 10^{23}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{kg} \cdot M^{-1}\right)^4 = 3{,}58 \cdot 10^{32}\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{kg}^2 \cdot M^{-2} \qquad (2)$$

Eftersom energi og masse er ækvivalente størrelser, kan vi beregne hvor meget masse, der forsvinder som funktion af tiden:

$$E = M \cdot c^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = E'(t) = M'(t) \cdot c^2 = -L = -3{,}58 \cdot 10^{32}\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{kg}^2 \cdot M^{-2} \qquad (3)$$

Overvej hvorfor der skal et minus ind i regnestykket ovenfor. (3) er en differentialligning, og den kan man løse analytisk eller vha. et CAS-værktøj. En udregning (som 3. g højniveau-matematikelever kan efterprøve) viser, at løsningen bliver:

$$M(t) = \left(-1{,}19 \cdot 10^{16} \frac{\mathrm{kg}^3}{\mathrm{s}} \cdot t + M_0^3\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (4)$$

hvor M_0 er det sorte huls masse til dannelsestidspunktet.

Eksempel.

Et sort hul har en masse på 10 solmasser. Levetiden, t_l, for det sorte hul kan bestemmes ud fra formel (4) forudsat, at det sorte hul ikke opsuger masse i løbet af sit levetid.

$M(t_l) = 0 = (-1{,}19 \cdot 10^{16}\,\mathrm{kg}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot t_l + (1{,}989 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg})^3)^{1/3} \Rightarrow t_l = (1{,}989 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg})^3 / (1{,}19 \cdot 10^{16}\,\mathrm{kg}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}) = 6{,}61 \cdot 10^{77}\,\mathrm{s} = 2{,}10 \cdot 10^{70}$ år.

Det sorte hul eksisterer altså i lang tid. (Universets alder er jo kun 13,8 Gyr.)

Som eksemplet ovenfor viser, er der i praksis tale om ganske stabile legemer, men som formel (4) og eksemplet ovenfor også viser, afhænger levetiden af det sorte huls masse i 3. potens. Dvs. hvis man lader startmassen af det sorte hul falde, vil levetiden også falde drastisk. I opgaven på side 3 regnes på problemet for et sort hul med massen 10^{10} kg. Her vises det, at levetiden er faldet til kun $2{,}65 \cdot 10^{6}$ år.

Spørgsmålet er så, om der overhovedet findes så små sorte huller. Inderen Chandrasekhar har vist, at døde stjerner (hvide dværge) med masser på under ca. 1,4 solmasser sagtens kan holde sig selv stabile ved hjælp af en mekanisme som kaldes degeneret tryk i gasser, så de små sorte huller dannes ikke af stjerner. En teori er, at de er blevet dannet ved et kolossalt tryk i Big Bang.

Eksempel

Den store accelerator ved CERN, LHC har indtil videre skudt stråler af partikler ind i hinanden. Hver stråles partikelenergier er 4 TeV. ($T = 10^{12}$.) Efter 2015 vil der blive forsøgt med energier på 6,5 TeV, og måske lykkes det at skabe mikropskopiske sorte huller ved disse sammenstød. Einsteins generelle relativitetsteori forudsiger ikke sorte huller, men nogle nye fysikteorier forudsiger, at små huller kan dannes.
http://press.web.cern.ch/backgrounders/safety-lhc

Opgave: Et sort hul

Betragt et sort hul med massen $1 \cdot 10^{10}$ kg.

a) Beregn det sorte huls levetid.
b) Lav en tabel med t, L, og M-værdier.
c) Lav en (t, L)-graf, en (t, M)-graf samt en (M, L)-graf.
d) Lav en endelig en (M, L)-graf.
e) Prøv at fortolke de fundne grafer.

-o-