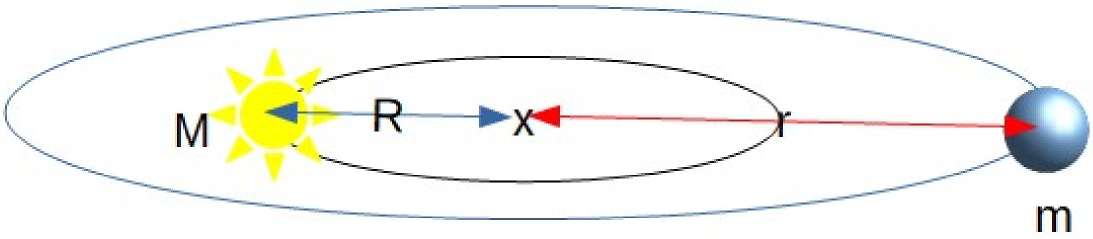
Radialhastighedsmetoden – at bestemme massen af en usynlig planet.

Ved hjælp af doppler-effekten vil vi udlede en formel til at bestemme massen af en planet, som vi ikke direkte kan observere.



Figur 1: En stjerne og en planet bevæger sig om deres fælles massemidtpunkt. De har samme omløbstid omkring massemidtpunktet. Stjernens baneradius er stærkt overdrevet, og det er planetens radius også ift. stjernens radius.

Betragt figur 1. Mellem stjernen med massen *M*, og massemidtpunktet er der afstanden *R*. Mellem planeten med massen *m* og masse-midtpunktet er der afstanden *r*.

Man kan vise følgende relation, som kaldes *vægtstangsreglen*

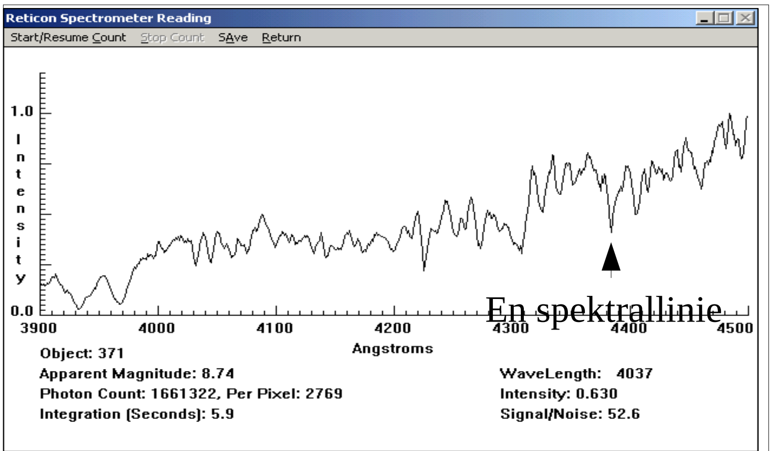
$$m \cdot r = M \cdot R \qquad (1)$$

Hvis du har haft vektorregning, kan du vise (1), hvis du anvender definitionen af massemidtpunktet samt sætter origo for koordinatsystemet i massemidtpunktet. Har du ikke haft vektorregning, må du nøjes med at acceptere (1) uden videre. (1) indeholder den ønskede størrelse – nemlig planetens masse *m*; derfor vil vi bruge denne formel. De øvrige størrelser er heller ikke kendt, så vi skal have fundet udtryk for dem, så de kan indsættes i (1), så målbare størrelser indgår på pladserne for *r*, *M* og *R*.

Doppler viste, at målte bølgelængder for lys ændres, hvis lysgiveren bevæger sig mod os eller væk fra os med en fart v_{rad}. Han viste følgende sammenhæng

$$v_{rad} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c\,. \qquad (2)$$

Her betegner c lyshastigheden, $\Delta\lambda$ er forskellen mellem en målt spektrallinies bølgelængde og samme spektrallinie målt i laboratoriet. λ_0 = laboratoriebølgelængden. Et eksempel på et spektrum er vist i figur 2.



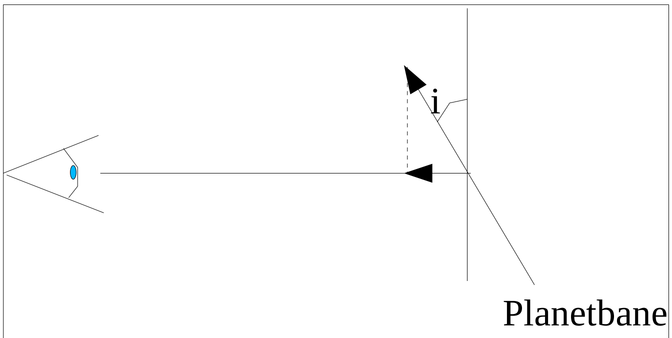
Figur 2: Et spektrum hvor en spektrallinie (absorption) er markeret. Linien flytter sig fra side til side, når stjernen henholdsvist bevæger sig imod os og væk fra os.

Når man betragter et stjerne/planet-system, betragtes det normalt med en vis vinkel imellem planetbanen og himmelbaggrunden. Se figur 3.

Som man kan se på figur 3 er der følgende sammenhæng mellem stjernens rotationsfart, $v_{rot,}$ og stjernens maksimale radialhastighed, v_{rad}

$$\frac{v_{rad}^{max}}{v_{rot}} = \sin(i) \Leftrightarrow$$

$$v_{rot} = \frac{v_{rad}^{max}}{\sin(i)} \qquad (3)$$



*Figur 3: En observatør betragter stjerne/planetsystemet i en vinkel **i** i forhold til himmelbaggrunden. Observatøren kan måle radialhastigheden men ikke rotationsfarten. På tegningen kan du se v_{rot} samt $v_{rad,\,max}$ indtegnetde. $v_{rad,\,max}$ er den pil, som peger ind mod øjet. v_{rot} ligger i samme plan som planetbanen, som du kun kan se et snit af. (Banen bevæger sig ud- og ind i papirets plan.*

Når vi måler spektralliniernes forskydning til forskellige tidspunkter, får vi forskellige værdier, da stjernens hastighed med tiden ændrer retning i forhold til os. Den roterer jo rundt omkring sit massemidtpunkt. For eksempel er v_{rad} = 0, når stjernen bevæger sig vinkelret på synslinien til os, men den er ikke 0 ved andre situationer. Derfor får man en sinusformet graf, som er vist på graf 1.

På graf 1 kan man læse den største radialhastighed som amplituden, og man kan aflæse stjernens (eller planetens) omløbstid på 1. aksen.

Hvis inklinationen (betragtningsvinklen) *i* er kendt, kan man altså bestemme stjernens rotationsfart. Rotationsfarten indgår jo ikke i (1), men vi kan udtrykke *R* ved rotationsfarten og dermed bort-substituere *R*. Vi antager, at planeten og stjernen bevæger sig i cirkelbaner omkring massemidtpunktet, og derfor gælder følgende sammenhæng

$$v_{rot}^{stjerne} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}.$$

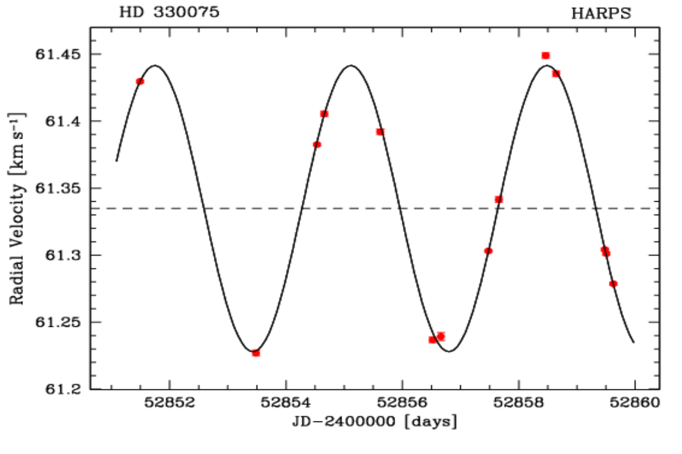
Indsætter vi ovenstående udtryk i (1) får vi:

$$m = \frac{T \cdot v_{rot}^{stjerne}}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot M \qquad (4)$$

I (4) har vi altså et udtryk, hvor stjernens rotationsfart indgår. Den kan relateres til radialhastigheden ved hjælp af (3).

Planetens afstand til stjernen indgår også i (4), så vi skal have den erstattet af noget kendt. Til dette kan vi bruge Keplers 3. lov på den form, som den står i kapitel 6 i ”Det levende univers”:

$$\frac{\left(\frac{r}{AU}\right)^3}{\left(\frac{T}{yr}\right)^2} = \frac{M_{stjerne} + m_{planet}}{M_{Sol}} \simeq \frac{M_{stjerne}}{M_{Sol}} \Rightarrow$$



Graf 1. En radialhastighedskurve for *planeten* om stjernen HD330075. 1. aksen viser tiden i julianske dage. (Antal dage fra skabelsen af Edens have.) Man ser, at *T* = 3,39 dage og at amplituden er 61,42 km/s. Denne hastighed er planetens maksimale radialhastighed. Stjernens hastighed er 105,9 m/s. Kilde: http://www.ls.eso.org/lasilla/sciops/3p6/harps/science.html

$$r=\left(\frac{M_{stjerne}}{M_{Sol}}\cdot\left(\frac{T}{\mathrm{yr}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{AU}. \tag{5}$$

Nu kan vi endelig sammenfatte (3), (4) og (5), og vi får:

$$m=\frac{v_{rad}^{max}\cdot T\cdot M_{stjerne}}{2\cdot\pi\cdot\sin(i)\cdot\left(\frac{M_{stjerne}}{M_{Sol}}\cdot\left(\frac{T}{yr}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 1{,}496\cdot 10^{11}\,m}. \tag{6}$$

Hvis vi omregner enhederne for tid til yr og stjernemasse i solmasser i tælleren, får vi:

$$m=\frac{v_{rad}^{max}\cdot\frac{T}{\mathrm{yr}}\cdot\frac{M_{stjerne}}{M_{sol}}\cdot 1{,}989\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}\cdot 3{,}156\cdot 10^{7}\,\mathrm{s}}{2\cdot\pi\cdot\sin(i)\cdot\left(\frac{M_{stjerne}}{M_{Sol}}\cdot\left(\frac{T}{\mathrm{yr}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 1{,}496\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$m=\frac{v_{rad}^{max}\cdot\frac{T}{\mathrm{yr}}\cdot\frac{M_{stjerne}}{M_{sol}}}{\sin(i)\cdot\left(\frac{M_{stjerne}}{M_{Sol}}\cdot\left(\frac{T}{\mathrm{yr}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}}\cdot 6{,}678\cdot 10^{25}\ \mathrm{kg}. \tag{7}$$

Dermed er vi klar til et par eksempler.

Eksempel 1. Stjernen 51 Pegasi.

Den første exoplanet man fandt var omkring 51 Pegasi. Man målte følgende:
T = 4,23 døgn.
M = 1 M_{Sol}. (Denne størrelse blev bestemt ved at finde ud af stjernens type.)
$v_{\mathrm{rad,\,max}}$ = 56,1 m/s.
i er ukendt!

Tallene sættes ind i (7)

$$m=\frac{56{,}1\,m/s\cdot\frac{4{,}23\,d}{365{,}256\,d}\cdot 1}{\sin(i)\cdot(1\cdot\left(\frac{4{,}23}{365{,}256}\right)^2)^{\frac{1}{3}}}\cdot 6{,}678\cdot 10^{25}\,kg=\frac{8{,}48\cdot 10^{26}\,kg}{\sin(i)}$$

Ovenstående masse er 40 % af Jupiters masse såfremt sin(i) = 1, dvs. i = 90°. Men det er den jo nok ikke, for hvorfor skulle vi lige præcis betragte stjernesystemet fra den vinkel?

Pt. kan vi ikke bestemme i, så vi ved faktisk ikke, hvad den pågældende planet vejer.

Eksempel 2. HD330075.

T = 3,39^{d}.
$v_{rad,\ max}$ = 105,9 m/s.
M = 0,7±0,1 $M_{sol.}$
i er ukendt.

$$m=\frac{105{,}9\,m/s\cdot\left(\frac{3{,}39}{365{,}256}\right)\cdot 0{,}7}{\sin(i)\cdot\left(0{,}7\cdot\left(\frac{3{,}39}{365{,}256}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{3}}}\cdot 6{,}678\cdot 10^{25}\,kg=\frac{1{,}17\cdot 10^{27}\,kg}{\sin(i)}=\frac{0{,}62\cdot M_{Jupiter}}{\sin(i)}$$

Planeten er i øvrigt 0,039 AU fra stjernen. Til sammenligning er Merkur 0,3871 AU fra Solen.

Opgave 1. α CenB b

Målte data er for stjernen α Cen B er
T = 3,23570^{d}.
$v_{rad,\ max}$ = 0,510 m/s.
M = 0,9340 $M_{sol.}$
i er ukendt.

Beregn planetens masse. Beregn også, ved hjælp af Keplers 3. lov, planetbanens halve storakse.

Opgave 2. Kepler-20 b

Målte data er for stjernen Kepler-20 b (eller KOI-70 b) er
T = 3,6961219^{d}.
$v_{rad,\ max}$ = 3,7 m/s.
M = 0,912 $M_{sol.}$
i = 86,5°.

Beregn planetens masse. Beregn også, ved hjælp af Keplers 3. lov, planetbanens halve storakse.

-o-