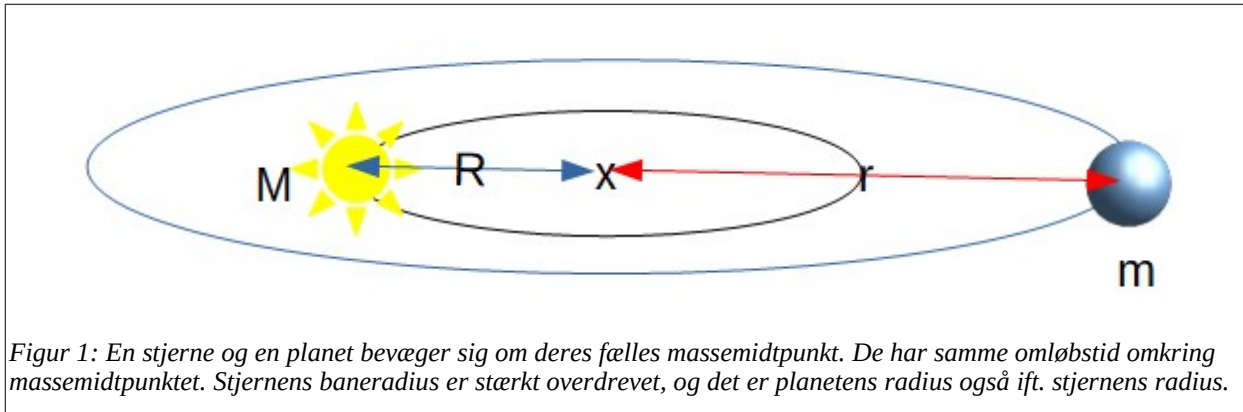


Radialhastighedsmetoden – at bestemme massen af en usynlig planet.

Ved hjælp af doppler-effekten vil vi udlede en formel til at bestemme massen af en planet, som vi ikke direkte kan observere.



Betragt figur 1. Mellem stjernen med massen M , og massemidtpunktet er der afstanden R . Mellem planeten med massen m og masse-midtpunktet er der afstanden r .

Man kan vise følgende relation, som kaldes vægtstangsreglen

$$m \cdot r = M \cdot R \quad (1)$$

Hvis du har haft vektorregning, kan du vise (1), hvis du anvender definitionen af massemidtpunktet samt sætter origo for koordinatsystemet i massemidtpunktet. Har du ikke haft vektorregning, må du nøjes med at acceptere (1) uden videre. (1) indeholder den ønskede størrelse – nemlig planetens masse m ; derfor vil vi bruge denne formel. De øvrige størrelser er heller ikke kendt, så vi skal have fundet udtryk for dem, så de kan indsættes i (1), så målbare størrelser indgår på pladserne for r , M og R .

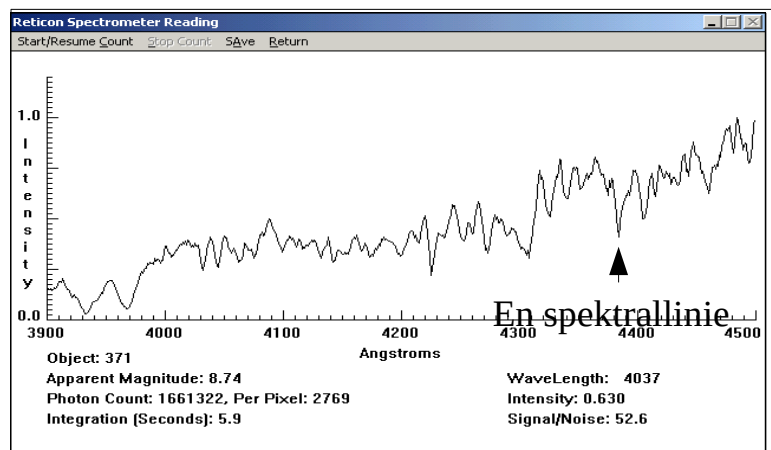
Doppler viste, at målte bølgelængder for lys ændres, hvis lysgiveren bevæger sig mod os eller væk fra os med en fart v_{rad} . Han viste følgende sammenhæng

$$v_{rad} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \cdot c \quad (2)$$

Her betegner c lyshastigheden, $\Delta \lambda$ er forskellen mellem en målt spektrallinies bølgelængde og samme spektrallinie målt i laboratoriet. λ_0 = laboratoriebølgelængden. Et eksempel på et spektrum er vist i figur 2.

Når man betragter et stjerne/planet-system, betragtes det normalt med en vis vinkel imellem planetbanen og himmelbaggrunden. Se figur 3.

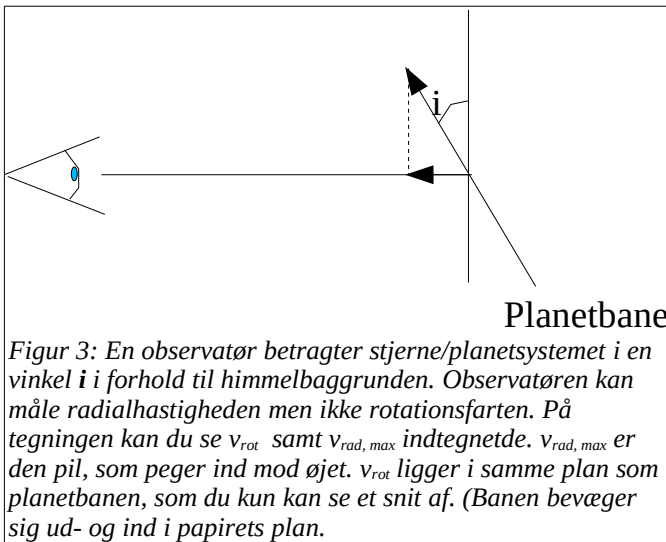
Som man kan se på figur 3 er der følgende sammenhæng mellem



Figur 2: Et spektrum hvor en spektrallinie (absorption) er markeret. Linien flytter sig fra side til side, når stjernen henholdsvis bevæger sig imod os og væk fra os.

stjernens rotationsfart, v_{rot} , og stjernens maksimale radialhastighed, v_{rad}

$$\frac{v_{rad}^{max}}{v_{rot}} = \sin(i) \Leftrightarrow v_{rot} = \frac{v_{rad}^{max}}{\sin(i)} \quad (3)$$



Når vi måler spektralliniernes forskydning til forskellige tidspunkter, får vi forskellige værdier, da stjernens hastighed med tiden ændrer retning i forhold til os. Den roterer jo rundt omkring sit massemidtpunkt. For eksempel er $v_{rad} = 0$, når stjernen bevæger sig vinkelret på synslinien til os, men den er ikke 0 ved andre situationer. Derfor får man en sinusformet graf, som er vist på graf 1.

På graf 1 kan man læse den største radialhastighed som amplituden, og man kan aflæse stjernens (eller planetens) omløbstid på 1. akser.

Hvis inklinationen (betragtningvinklen) i er kendt, kan man altså bestemme stjernens rotationsfart. Rotationsfarten indgår jo ikke i (1), men vi kan udtrykke R ved rotationsfarten og dermed bortsubstituere R . Vi antager, at planeten og stjernen bevæger sig i cirkelbaner omkring massemidtpunktet, og derfor gælder følgende sammenhæng

$$v_{rot}^{stjerne} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

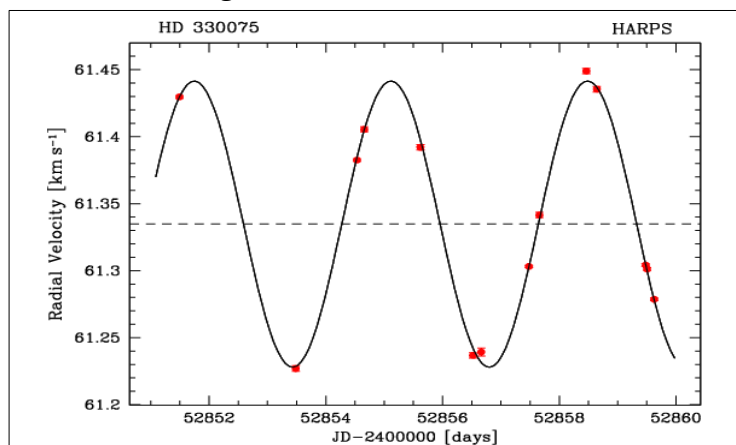
Indsætter vi ovenstående udtryk i (1) får vi:

$$m = \frac{T \cdot v_{rot}^{stjerne}}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot M \quad (4)$$

I (4) har vi altså et udtryk, hvor stjernens rotationsfart indgår. Den kan relateres til radialhastigheden ved hjælp af (3).

Planetens afstand til stjernen indgår også i (4), så vi skal have den erstattet af noget kendt. Til dette kan vi bruge Keplers 3. lov på den form, som den står i kapitel 6 i "Det levende univers":

$$\left(\frac{r}{AU}\right)^3 = \frac{M_{stjerne} + m_{planet}}{M_{Sol}} \approx \frac{M_{stjerne}}{M_{Sol}} \Rightarrow \left(\frac{T}{yr}\right)^2 = \frac{M_{stjerne}}{M_{Sol}}$$



Graf 1. En radialhastighedskurve for planeten om stjernen HD330075. 1. akser viser tiden i julianske dage. (Antal dage fra skabelsen af Edens have.) Man ser, at $T = 3,39$ dage og at amplituden er 61,42 km/s. Denne hastighed er planetens maksimale radialhastighed. Stjernens hastighed er 105,9 m/s. Kilde: <http://www.lis.eso.org/lasilla/sciops/3p6/harps/science.html>

$$r = \left(\frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot \left(\frac{T}{\text{yr}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \text{AU}. \quad (5)$$

Nu kan vi endelig sammenfatte (3), (4) og (5), og vi får:

$$m = \frac{v_{\text{rad}}^{\text{max}} \cdot T \cdot M_{\text{stjerne}}}{2 \cdot \pi \cdot \sin(i) \cdot \left(\frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot \left(\frac{T}{\text{yr}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}. \quad (6)$$

Hvis vi omregner enhederne for tid til yr og stjernemasse i solmasser i tælleren, får vi:

$$m = \frac{v_{\text{rad}}^{\text{max}} \cdot \frac{T}{\text{yr}} \cdot \frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{sol}}} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}}{2 \cdot \pi \cdot \sin(i) \cdot \left(\frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot \left(\frac{T}{\text{yr}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}$$

⇔

$$m = \frac{\frac{v_{\text{rad}}^{\text{max}}}{\text{m/s}} \cdot \frac{T}{\text{yr}} \cdot \frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{sol}}}}{\sin(i) \cdot \left(\frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot \left(\frac{T}{\text{yr}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}} \cdot 6,678 \cdot 10^{25} \text{ kg}. \quad (7)$$

Dermed er vi klar til et par eksempler.

Eksempel 1. Stjernen 51 Pegasi.

Den første exoplanet man fandt var omkring 51 Pegasi. Man målte følgende:

$T = 4,23$ døgn.

$M = 1 M_{\text{Sol}}$. (Denne størrelse blev bestemt ved at finde ud af stjernens type.)

$v_{\text{rad, max}} = 56,1$ m/s.

i er ukendt!

Tallene sættes ind i (7)

$$m = \frac{56,1 \cdot \frac{4,23}{365,256} \cdot 1}{\sin(i) \cdot \left(1 \cdot \left(\frac{4,23}{365,256} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}} \cdot 6,678 \cdot 10^{25} \text{ kg} = \frac{8,48 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{\sin(i)}$$

Ovenstående masse er 40 % af Jupiters masse såfremt $\sin(i) = 1$, dvs. $i = 90^\circ$. Men det er den jo nok ikke, for hvorfor skulle vi lige præcis betragte stjernesystemet fra den vinkel?

Pt. kan vi ikke bestemme i , så vi ved faktisk ikke, hvad den pågældende planet vejer.

Eksempel 2. HD330075.

$$T = 3,39^{\text{d}}$$

$$v_{\text{rad, max}} = 105,9 \text{ m/s.}$$

$$M = 0,7 \pm 0,1 M_{\text{sol.}}$$

i er ukendt.

$$m = \frac{105,9 \cdot \left(\frac{3,39}{365,256} \right) \cdot 0,7}{\sin(i) \cdot \left(0,7 \cdot \left(\frac{3,39}{365,256} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}} \cdot 6,678 \cdot 10^{25} \text{ kg} = \frac{1,17 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{\sin(i)} = \frac{0,62 \cdot M_{\text{Jupiter}}}{\sin(i)}$$

Planeten er i øvrigt 0,039 AU fra stjernen. Til sammenligning er Merkur 0,3871 AU fra Solen.

Opgave 1. α Cen B b

Målte data er for stjernen α Cen B er

$$T = 3,23570^{\text{d}}$$

$$v_{\text{rad, max}} = 0,510 \text{ m/s.}$$

$$M = 0,9340 M_{\text{sol.}}$$

i er ukendt.

Beregn planetens masse. Beregn også, ved hjælp af Keplers 3. lov, planetbanens halve storakse.

Opgave 2. Kepler-20 b

Målte data er for stjernen Kepler-20 b (eller KOI-70 b) er

$$T = 3,6961219^{\text{d}}$$

$$v_{\text{rad, max}} = 3,7 \text{ m/s.}$$

$$M = 0,912 M_{\text{sol.}}$$

$$i = 86,5^{\circ}$$

Beregn planetens masse. Beregn også, ved hjælp af Keplers 3. lov, planetbanens halve storakse.