

# Bjerghøjder



*Figur 1: Aftenbillede af Vesuv ved Napoli. [11]*

Af Michael Andrew Dolan Møller

juni 2022

## Indholdsfortegnelse

0. Indledning.....	3
1. Kræfter og tryk.....	3
1.1. Kræfter.....	3
1.1.1. Tyngdekraften.....	3
1.1.2. Gravitationskraften.....	3
1.1.2.1. Eksempel.....	3
1.1.2.2. Øvelse.....	3
1.2. Tryk.....	4
1.2.1. Trykdefinition.....	4
1.2.1.1. Eksempel.....	4
1.2.1.2. Øvelse.....	4
1.3. Knusestyrke.....	5
2. Bjerges dannelse og opbygning.....	5
2.1. Mineraler.....	5
2.2. Maksimalhøjde af bjerge på Jorden og andre kloder.....	7
2.2.1. Simpel fysisk model af et bjerg.....	7
Eksempel 2.2.2.1.....	7
3. Sammenfatning.....	8
4. Opgaver.....	8
Opgave 4.1. Formel for maksimal bjerghøjde.....	8
Opgave 4.2. Planeternes bjerghøjder.....	8
Opgave 4.3. Kloders form.....	8
5. Referencer.....	9

## 0. Indledning

I denne note skal vi se på, hvor høje bjerge teoretisk set kan blive på Jorden og på andre kloder, og vi skal i samme ombæring også se på, hvor små kugleformede kloder kan være i naturen.

Noten er inspireret af opgave 633 i [1]. Den viser, hvordan man med voldsomme forsimplinger af virkeligheden alligevel kan opnå realistiske resultater.

## 1. Kræfter og tryk

### 1.1. Kræfter

Når legemer i naturen påvirker hinanden kalder vi påvirkningen for en kraft. F.eks. kan man slippe en bold fra en given højde, og så farer den mod jordoverfladen.

#### 1.1.1. Tyngdekraften

Det er tyngdekraften,  $F_t$ , der rykker i bolden. Tyngdekraften er givet ved formlen

$$F_t = m \cdot g \quad (1)$$

Ovenfor er  $m$  legemets masse, tyngdeaccelerationen  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$  i Danmark, og kraftens enhed er  $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \equiv \text{N}$  efter den engelske fysiker Isaac Newton, som grundlagde det klassiske kraftbegreb.

#### 1.1.2. Gravitationskraften

En mere generel version af tyngdekraften tager højde for, at man ikke altid er tæt på Jordens overflade. Formlen er

$$F_G = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \quad (2)$$

Indekset,  $G$ , ovenfor betyder *gravitation*, gravitationskonstanten  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  og afstanden til Jordens tyngdepunkt er  $r$ .

Jorden er lidt fladtrykt ved polerne, og nogle gange skal man tage højde for det, dvs.  $r \in [6,356; 6,378] \cdot 10^6 \text{ m}$ .

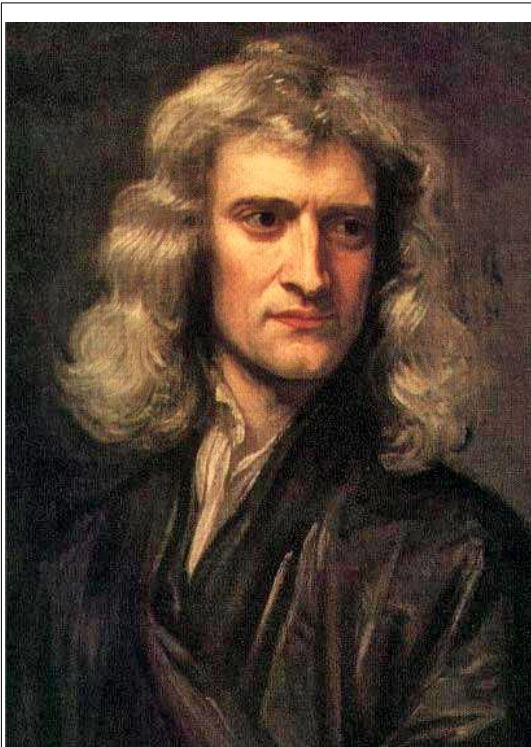
##### 1.1.2.1. Eksempel

En person har massen 60 kg. Dermed kan tyngdekraften på personen beregnes til

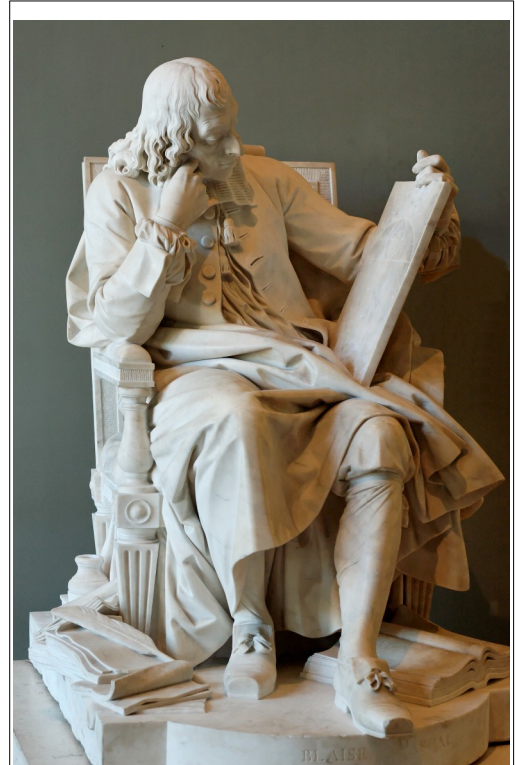
$$F_t = m \cdot g = 60 \text{ kg} \cdot 9,82 \text{ m/s}^2 = 589 \text{ N} = 0,59 \text{ kN}.$$

##### 1.1.2.2. Øvelse

- Find Jordens- og Månens masser samt deres middelf afstand i en tabel.
- Beregn gravitationskraften mellem de to kloder.



Figur 3: Isaac Newton. Kopi af billede af Sir Godfrey Kneller, 1689. [2]



Figur 2: Statue af Blaise Pascal. Statuen kan ses på Louvre i Paris. [3]

## 1.2. Tryk

### 1.2.1. Trykdefinition

Hvis man presser på et legeme med en kraft,  $F$ , på et areal,  $A$ , defineres trykket,  $p$ , som

$$p = \frac{F}{A} \quad (3)$$

Enheden for trykket er  $[p] = \text{N/m}^2 \equiv \text{Pa}$ , som udtales *pascal* efter den franske fysiker og matematiker *Blaise Pascal*. Pascal var en pioner indenfor trykbegrebet, og det er derfor trykenheden er opkaldt efter ham.

#### 1.2.1.1. Eksempel

En person vejer 80 kg og står på et ben. Arealet af foden er  $A = 0,03 \text{ m}^2$ .

Trykket er

$$p = \frac{F_t}{A} = \frac{80 \text{ kg} \cdot 9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,03 \text{ m}^2} = 26187 \text{ Pa} = 26 \text{ kPa}.$$

#### 1.2.1.2. Øvelse

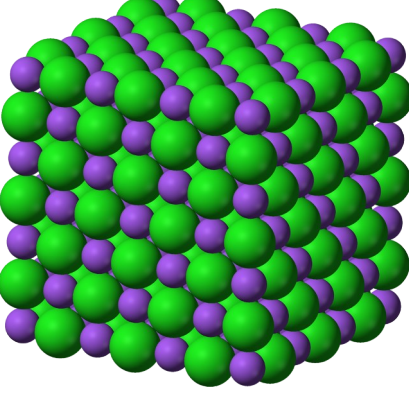
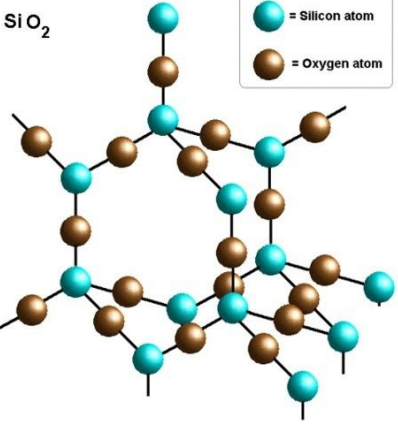
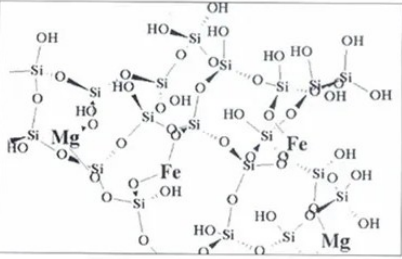
Middeltrykket ved jordoverfladen er 101325 Pa.

- Beregn tyngdekraften af den luft, der presser ned på  $1,0 \text{ m}^2$  på jorden.
- Beregn massen af den luft, der presser ned på  $1,0 \text{ m}^2$  på jorden.

## 1.3. Knusestyrke

Bjerge er lavet af forskellige slags mineraler, som igen er opbygget af atomer. Atomerne kan binde sig på forskellige måder. Nedenfor er vist en tabel med 2 eksempler på mineraler og 1 eksempel på hvordan bjergarten *basalt* er opbygget.

Tabel 1: Forskellige slags gitterstrukturer samt opbygningen af basalt.

		
<p>NaCl - stensalt eller halcit, som er opbygget i en kubisk struktur. [4]</p>	<p>SiO<sub>2</sub> – Siliciumdioxid. Dette molekyle er ganske almindeligt i klipper. [9]</p>	<p>Opbygningen af basalt. [5] Basalt er lavet ved høj temperatur og tryk, og det findes f. eks. i Mauna Kea.</p>

Det er elektriske kræfter, der sørger for de kemiske bindinger, og de er meget store, men hvis massen af et bjerg er tilstrækkelig stor, kan trykket fra gravitationskræfter ødelægge de kemiske bindinger, så mineralerne i bjerget knuses.

Det tryk, der skal til, for at knuse et materiale, kaldes for *knusestyrken C*. Den er typisk af størrelsesordenen  $10^8$  Pa. For granit er knusestyrken 90-120 MPa og for basalt er den 150-200 MPa. [10]

## 2. Bjerges dannelse og opbygning

### 2.1. Mineraler

Basalt er en klippeart, der dannes nær overfladen af Jorden ved hurtig afkøling af lava. Vulkaner er lavet af basalt. Basalt er også en klippeart, som findes på de øvrige planeter og måner. De oceaniske plader er lavet af basalt, og flere ø-grupper er også lavet af samme materiale. Færøerne og Hawaii er eksempler på ø-grupper, der er lavet af basalt. [8]

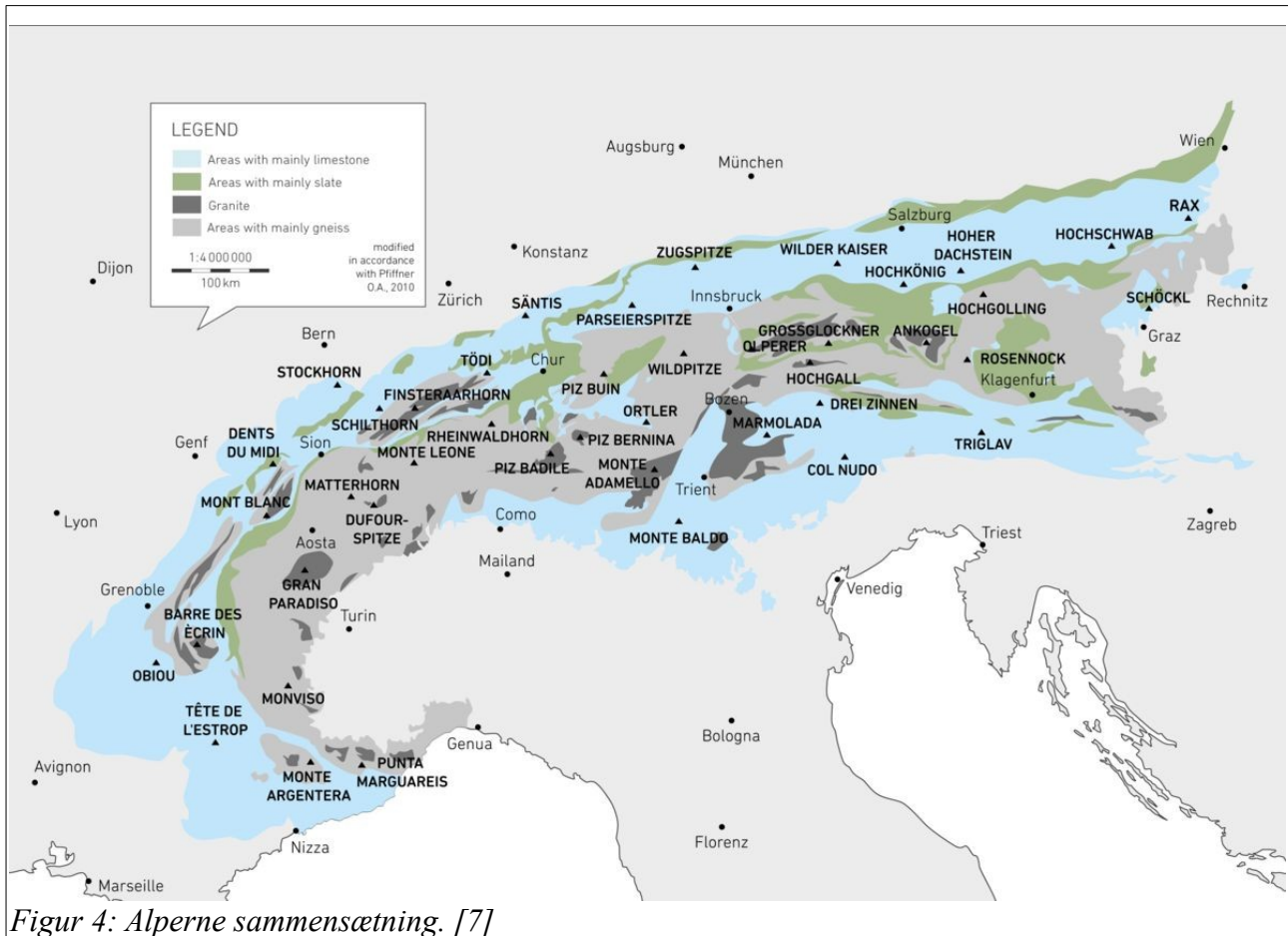
Granit dannes når magma afkøles langsomt nede i kontinentalskorpen, og flere bjergkæder er lavet af granit som f.eks. Himalaya, Andesbjergene og Rocky Mountains. [6]

Dele af Alperne er også lavet af granit, som man kan se på figur. [7]

Granit har en densitet på  $2700 \text{ kg/m}^3$ .  
Basalt har en densitet på  $2900 \text{ kg/m}^3$ .

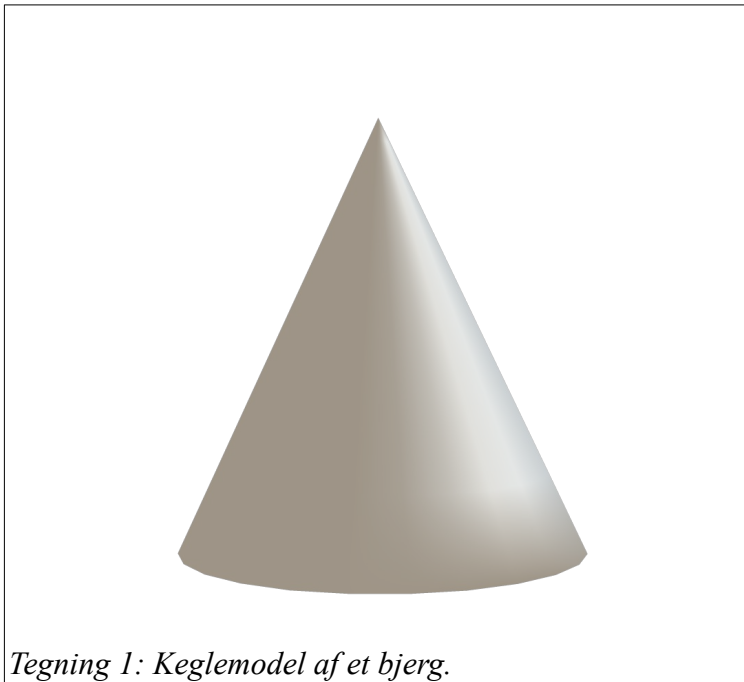
For at bjerge kan opstå, skal der enten være vulkaner, som kan kaste magma op på toppen af jordskorpen, eller der skal være pladetektonik, som kan presse kontinentalplader sammen, så de danner bjerge.

Kendte vulkanbjerge i Europa er f. eks. Vesuv og Etna i Italien, og bjerge dannet ved pladetektonik er f.eks. Alperne, Pyrenæerne. I Asien er f. eks. Himalaya-bjergene kendte.



Figur 4: Alperne sammensætning. [7]





Tegning 1: Keglemodel af et bjerg.

## 2.2. Maksimalhøjde af bjerge på Jorden og andre kloder

### 2.2.1 Simpel fysisk model af et bjerg

Bjerge kan have alle forskellige former alt afhængig af deres dannelse og historie, så vi antager en kegleform, for at få en tilstrækkelig simpel tilnærmelse af bjergets form.

Volumen af en kegle, som har grundfladeradius,  $a$ , og højden,  $h$ , er givet ved formlen

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot a^2 \quad (4)$$

Vi antager også, at bjerget er et selvstændigt legeme, som står frit ovenpå jordskorpen. I virkeligheden er bjerget jo en del af skorpen, og bjergets- og skorpens dynamik hænger sammen, men kunsten i modellering af virkeligheden er at lave modellerne så simple, at vi bliver i stand til at regne på dem i håbet om, at resultaterne alligevel forudsiger noget realistisk.

Bjerget tiltrækkes af Jordens gravitationsfelt, og derfor er der en trykpåvirkning mellem bjergets grundflade og den omliggende skorpe. Kraften og trykket er givet ved formlerne 1 og 3. Man skal bruge bjergets masse, og den kan beregnes ved hjælp af bjergets densitet og formel 4.

I opgave 2.1.1 vises formlen

$$h = \frac{3 \cdot C}{\rho \cdot g} \quad (5)$$

Hvor  $C$  er knusestyrken for bjergarten,  $\rho$  er bjergartens densitet og  $g$  er standardtyngdeaccelerationen.

Hvis man anvender gravitationsloven 2 i stedet for tyngdeloven, får man et lidt mere generelt udtryk, som også kan anvendes på andre kloder end Jorden. Formlen bliver

$$h = \frac{3 \cdot R^2 \cdot C}{G \cdot M \cdot \rho} \quad (6)$$

Ovenfor er  $R$  klodens middelfradius, og  $M$  er dens masse. De øvrige symboler er forklaret under formel 5.

#### Eksempel 2.2.2.1

Vi kan beregne maksimalhøjden af et bjerg på Jorden ved at indtaste standardtyngdeaccelerationen, basalts densitet og en knusestyrke på  $C = 175 \text{ Mpa}$  i formel 5. Resultatet bliver

$$h = \frac{3 \cdot 175 \text{ MPa}}{2900 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,807 \text{ m/s}^2} = 18 \text{ km.}$$

Hvis vi bruger granits knusestyrke får vi en højde på 10,5 km.

### 3. Sammenfatning

I denne note har vi set, hvordan vi med en relativ simpel model kan forudsige hvor store bjerge teoretisk set kan blive på forskellige kloder. Naturligvis skal der være bjergdannende aktiviteter på kloderne, dvs. vulkanisme og/eller pladetektonik, for at bjergene kan opstå.

Det er også vist hvordan samme teori kan anvendes til at give et bud på, hvor små runde kloder, vi kan finde i solsystemet.

### 4. Opgaver

#### Opgave 4.1. Formel for maksimal bjerghøjde

Forestil dig et kegleformet bjerg, som ligger oven på jorden. Keglen har radius  $a$  og højden  $h$ . Knusestyrken antages til  $C$ , og massefylden af bjerget er  $\rho$ .

- Opstil en formel for massen af bjerget idet rumfanget af keglen er givet ved formel 4.
- Opstil en formel for tyngdekraften på bjerget, som funktion af  $h$  og  $a$ .
- Opstil en formel for trykket på bunden af bjerget.
- Opstil en formel for den maksimale opnåelige bjerghøjde.

#### Opgave 4.2. Planeternes bjerghøjder

- Benyt Databog for fysik og kemi til at finde planetmasser og radier for Merkur, Venus, Månen, Jorden og Mars.
- Benyt formel 6 til at beregne maksimumhøjder for bjerge på Merkur, Venus, Månen, Jorden og Mars.
- Sammenlign dine beregnede værdier med tabelopslag.
- Prøv at forklare evt. afvigelser mellem model og virkelighed.
- Er det en god model?

#### Opgave 4.3. Kloders form

I denne opgave skal du bruge samme teori som vi brugte ved undersøgelsen af bjerghøjder til at give et groft overslag over, hvor lille en klode (en måne eller planet) må være, for at den bliver kugleformet.

Antag at knusestyrken for planetesimaler er  $C = 10^8$  Pa.

- Skitser to ens cylindriske 'sten' hver med radius,  $a$ , og længde,  $4a$ , og lad endefladerne mellem stenene røre ved hinanden. Hvad er afstanden mellem de to stens tyngdepunkter udtrykt ved  $a$ ?
- Opstil udtryk for stenenes masser som funktion af deres densitet,  $\rho$ , og  $a$ .
- Opstil et udtryk for gravitationskraften  $F(a)$  mellem de to legemer, når endefladerne rører ved hinanden.
- Opstil et udtryk for trykket på pladerne.
- Hvis massefylden af legemerne er  $2800 \text{ kg/m}^3$ , hvor store skal cylindrene så være, for at de knuser hinanden – såfremt det er enderne, der ramler sammen?
- Gentag beregningerne for kubiske 'sten.'
- Undersøg ved hjælp af Internettet månens radier og form og undersøg hvor godt beregningerne passer.



Ovenfor har vi antaget at det er gravitationskraften alene, der giver anledning til stenens iturivning. Det er klart, at hvis stenene bevæger sig imod hinanden med en vis fart, vil mindre sten kunne knuse hinanden. Desuden behøver stenene heller ikke ramme hinanden i enderne. De kan ramme på alle andre måder.

Derfor må de beregnede klippestørrelser ovenfor være lidt for højt sat.

## 5. Referencer

1. James A. van Allen: "924 Elementary Problems and Answers in Solar System Astronomy." University of Iowa Press, 1993. ISBN 0-87745-434-5.
2. [https://da.wikipedia.org/wiki/Isaac\\_Newton#/media/Fil:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg](https://da.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton#/media/Fil:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg)
3. [https://da.wikipedia.org/wiki/Blaise\\_Pascal#/media/Fil:Pascal\\_Pajou\\_Louvre\\_RF2981.jpg](https://da.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal#/media/Fil:Pascal_Pajou_Louvre_RF2981.jpg)
4. <https://opengeology.org/textbook/3-minerals/>
5. <https://www.fibre2fashion.com/industry-article/6728/basalt-rock-fibre>
6. <https://howtofindrocks.com/rocks-and-minerals-in-mountains/>
7. <https://www.outdoorproject.com/videos/safety-academy-lab-rock-types-rock-alps>
8. [https://en.wikipedia.org/wiki/Basalt#Other\\_bodies\\_in\\_the\\_Solar\\_System](https://en.wikipedia.org/wiki/Basalt#Other_bodies_in_the_Solar_System)
9. <https://www.quora.com/At-room-temperature-why-is-SiO2-solid-and-CO2-gas>
10. <https://civillearners.com/2019/11/30/compressive-strength-of-stone-for-various-stones/>
11. <https://www.italieonline.eu/da/vesuv-38.htm>