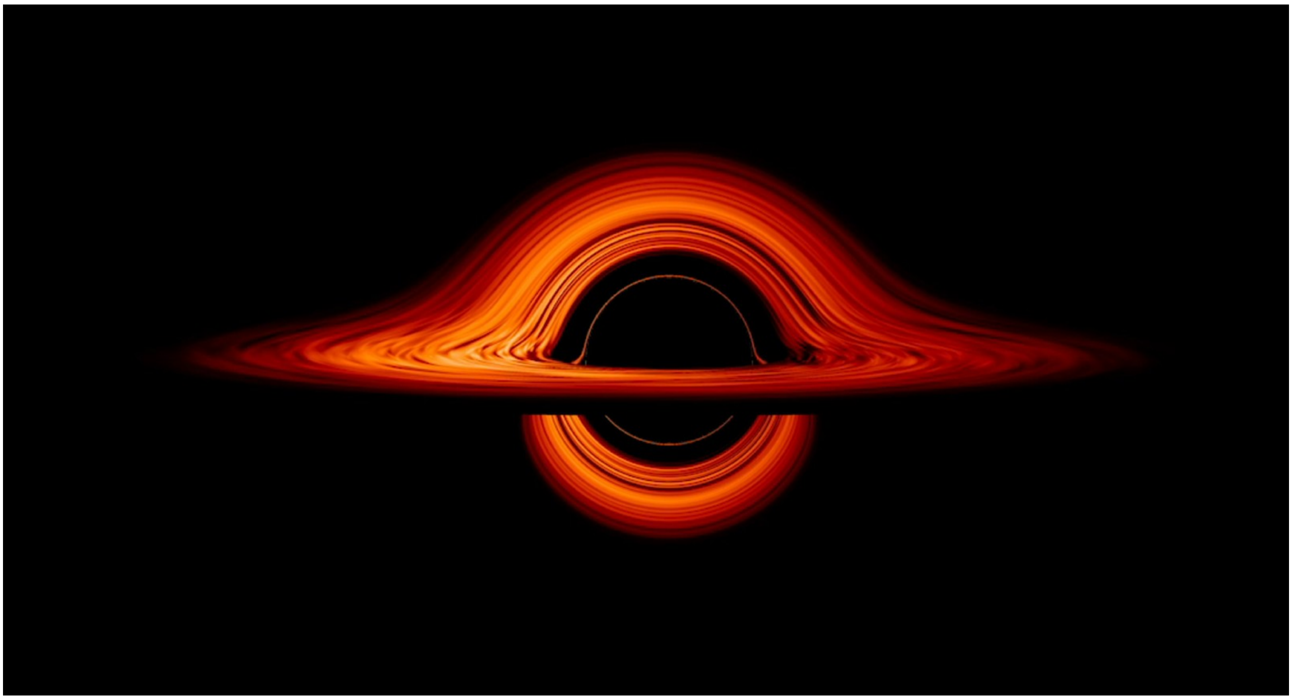
Sorte huller



Figur 1: En model af en tilvækstskive omkring et sort hul. Kilde: NASA/Goddard Space Flight Center/Jeremy Schnittman.

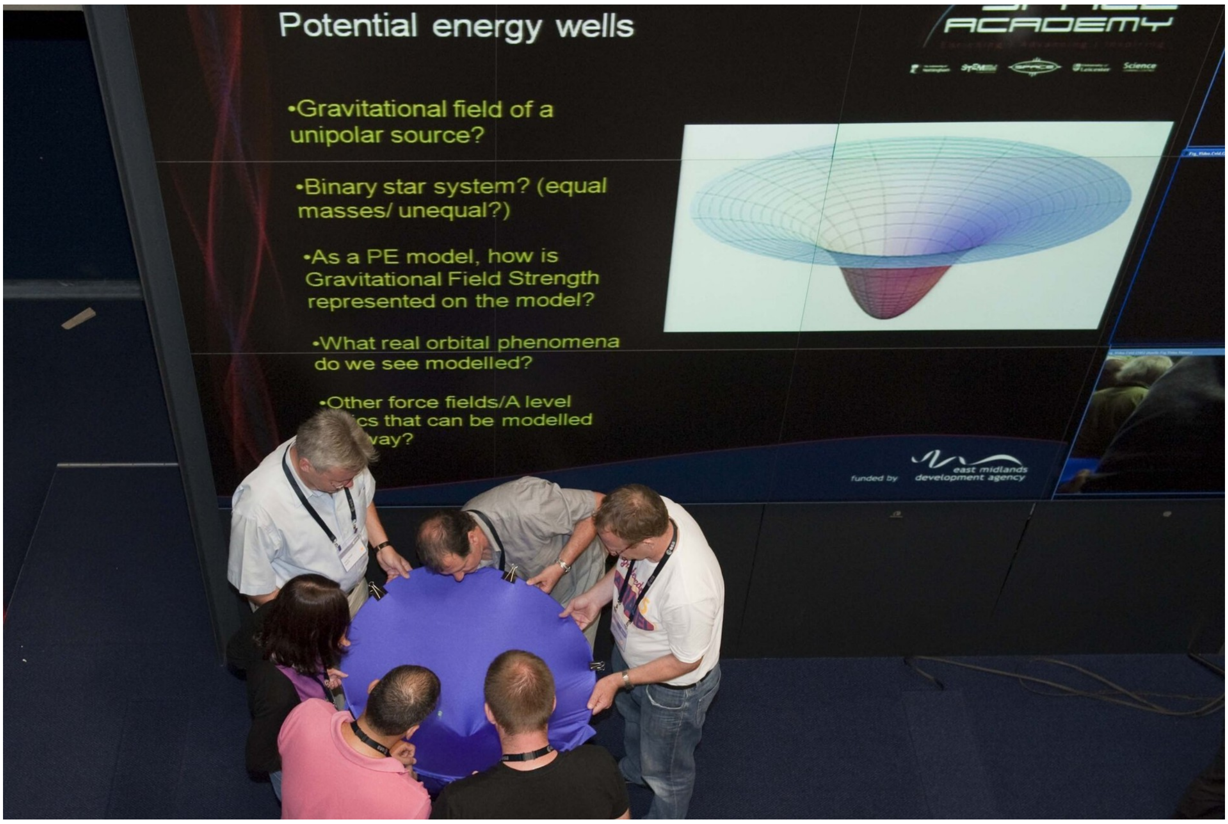
Af Michael Andrew Dolan Møller
Juni 2022

Indholdsfortegnelse

1. Beskrivelse af et sort hul

Et sort hul er defineret som et område, hvor hverken lys eller stof kan undslippe. Vi kender gravitationen fra den klassiske fysik, og læseren kan forestille sig hvor svært det er at undslippe Jordens tyngdefelt. For at det kan lade sig gøre kræves der store raketter. Men klassisk set burde lys være upåvirket af gravitationen.

I verdensrummet er det mere korrekt at benytte den generelle relativitetsteori, og ved brug af den ser man at selv masseløse partikler som lys udsættes for gravitation. Gravitationen er nu udtrykt ved en deformation af selve rumtiden, som er de 3 rumlige koordinater og en 4. koordinat, der er proportional med tiden. Dvs. rumtiden kan skrives med 4 koordinater (x, y, z, ct), hvor c er lysets hastighed i vakuum. Det er umuligt at forestille sig 4 dimensioner i hovedet, så derfor kan vi illustrere rumtiden ved at gå 1 dimension ned. Betragt figur 2. Her er vist hvordan en 2-dimensional flade er trukket i den 3. rumlige dimension. Vi har lagt en tung kugle i midten af klædet, som så bliver udtrukket. Derefter kan man tage en lille stålkugle og få den til at snurre rundt mens den flyver nedad. Noget tilsvarende sker med rumtiden, og netop fordi rumtiden er forvrænget, og da lys bevæger sig i rumtiden, vil lyset også udsættes for gravitation.



Figur 2: Noget elastisk stof er udspændt af 6 lærere, og en kaster en kugle, som så snurrer rundt mens den glider ned i bunden af stoffet. Øverst til højre ses en grafisk fremstilling af gravitationsfeltet. [1]

1.1. Schwarzschildradius

Et sort hul er en punktkilde, dvs. dens radius er 0. Men der er en radius fra hullet, hvor lys bliver opslugt, og den kalder vi schwarzschildradius efter Karl Schwarzschild. For at beregne den korrekt kræves der relativitetsteori, men vi kan faktisk godt udlede den klassisk, hvis vi lukker øjnene et par steder.

To legemer, der er gravitationelt bundne har den mekaniske energi

$$E_{mek}=E_{kin}+E_{pot}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+\frac{1}{2}\cdot M\cdot V^2-\frac{G\cdot M\cdot m}{r}$$

Det er samme formel, som vi så i kapitlet om Solsystemet. Hvis legemerne netop er frie er den mekaniske energi 0, og hvis legemerne er bundne til hinanden er energien negativ. Vi antager at farten af det sorte hul er $V = 0$. For en bestemt radius $r = R_{sch}$ er energien 0, og den radius er jo den, vi leder efter. Dvs.

$$0=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+\frac{-G\cdot M\cdot m}{R_{sch}}\Leftrightarrow$$

$$R_{sch}=\frac{2\cdot G\cdot M}{v^2}$$

I tilfældet en foton (altså lys) er hastigheden lyshastigheden, c, og dermed får vi

$$R_{sch}=\frac{2\cdot G\cdot M}{c^2} \qquad (1)$$

Dette er den rigtige formel for schwarzschildradius. Problemet med selve regnestykket er, at vi jo delte med det lille legemes masse, og da en fotons masse er 0, bryder vi matematikkens love.

1.1.1. Øvelse – beregning af schwarzschildradius

Find Solens masse, gravitationskonstanten og lysets hastighed i en tabel og vis at schwarzschildradius for et legeme med Solens masse er 2,95 km.

I øvelsen ovenfor så vi, at en solmasse giver en radius på 2,95 km. Dermed kan vi omskrive formel 1 til formlen

$$R_{sch}=\frac{M}{M_{sol}}\cdot 2{,}95\ \text{km} \qquad (2)$$

1.1.2. Øvelse – eftervisning af formel

Vis formel 2.

2. Fotoners vej omkring et sort hul

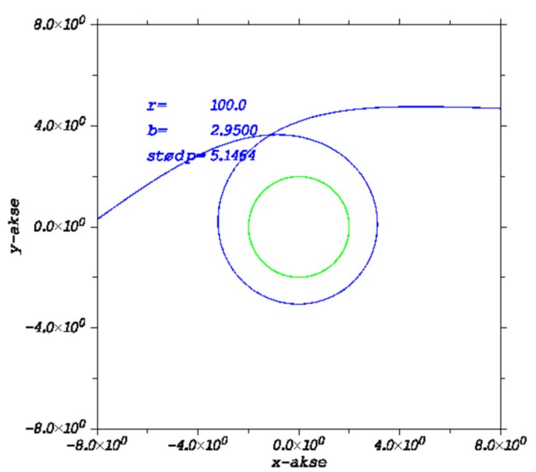
Hvis man vil beregne fotoners vej rundt om sorte huller, skal man løse Einsteins feltligninger. Det er en større omgang, men man kan også downloade et program på astro-gym.dk, der kan tegne banebevægelserne for en. Programmet findes også på astro-serveren, som Rosborg gymnasiums elever kan tilgå. På figur 3 og 4 er indtegnet baner for forskellige retninger for det indkommende lys.

På billederne kommer fotonerne langt ude fra højre, og de har vinklerne hhv. 2,95º og 3,00º målt i forhold til 1. aksen. Hvis vinklerne er under 2,95º kommer de indenfor schwarzschildradius, som er markeret med de grønne cirkler. Derfra er der ingen vej ud igen.

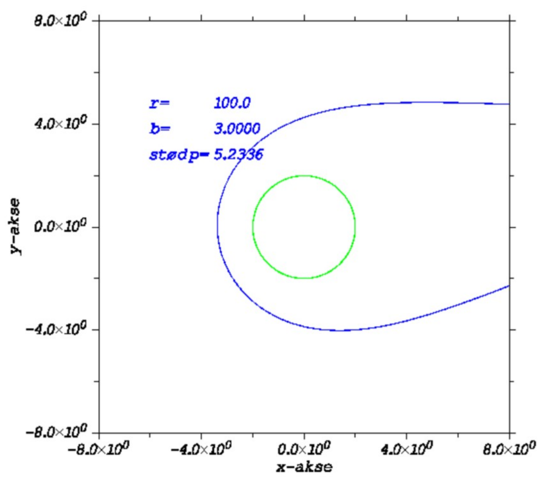
Her er det måske på sin plads at nævne, at sorte huller virker ved gravitation, og dermed er de ikke anderledes end andre tunge legemer, der tiltrækker stof. I populærpressen fremstilles sorte huller nogle gange som værende ”aggressive bæster”, der opsluger alt på deres vej, men sorte huller opsluger kun lys og stof, hvis man kommer tæt nok på dem. Akkurat som at Solen også opsluger stof, hvis man kommer for tæt på den.

1.1.3. Spil

Benyt programmet Fotontorpedo.tns, som ligger på astro-serveren til at skyde fotontorpedoer afsted, og benyt det sorte hul til at ramme de to rumskibe. Hvem skal bruge færrest forsøg for at ramme?



Figur 3: Fotons bevægelse omkring et sort hul. Fotonen slipper væk efter en tur omkring det sorte hul.

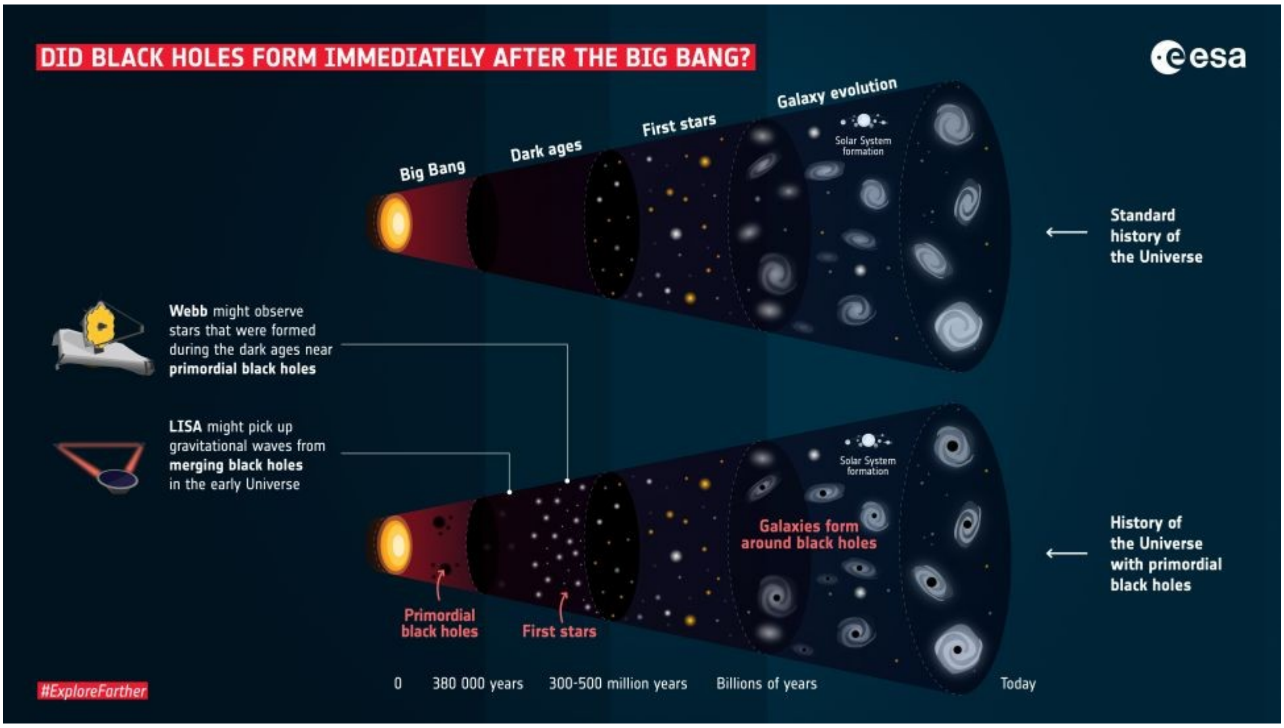


Figur 4: Fotons bevægelse omkring et sort hul. Fotonen sendes retur hvor den kom fra.

3. Dannelse og fordampning af sorte huller

3.1. Dannelse af sorte huller

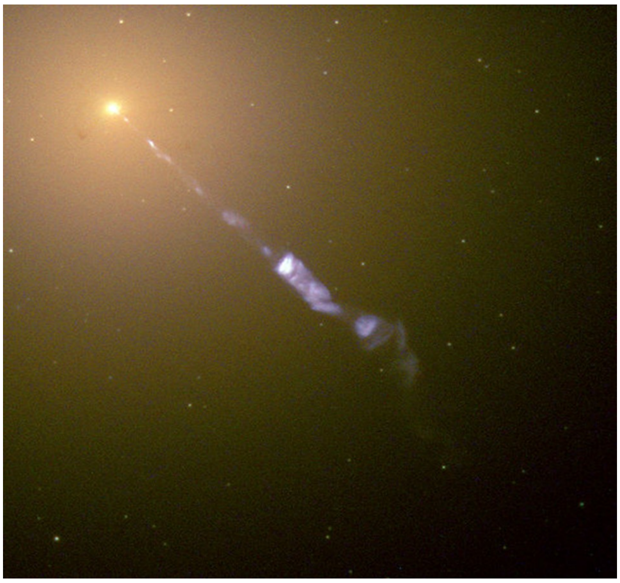
Sorte huller dannes ved supernovaeeksplosioner af stjerner, der vejer mere end ca. 15 solmasser.[1] Selve den del af en stjernes masse, der skal bruges til at lave det sorte hul, behøver dog ikke veje mere end ca. 3-4 solmasser. Sorte huller blev sandsynligvis også dannet ved Big Bang. [2] De har dermed været med til at danne galakserne, og det ændrer lidt på den tidslinje, man hidtil har troet gælder for Universets udvikling.



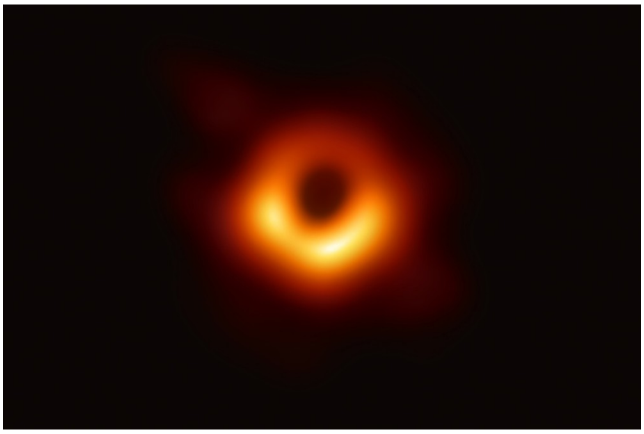
Figur 5: Bemærk, at de sorte huller har været med til at danne stjerner væsentligt tidligere end øverste model viser.[2] samt ESA.

1 Det er svært at give en eksakt grænse, da det ikke kun er massen, der bestemmer om en døende stjerne ender som neutronstjerne eller sort hul.

I dag ved vi, at de eksisterer fordi, vi har observeret dem. På figur 6 ses et billede af galaksen M87. Man ser, at den udstråler en jet af gas, og det er et indicium på, at der er noget meget tungt i midten af galaksen.



Figur 6: Galaksen M87. Kilde: NASA.



Figur 7: Et optaget billede af det sorte hul i midten af M87. Kilde: Event Horizon Telescope.

Det sorte hul i midten af M87 har en masse på 6,5 mia. solmasser. Det vises i øvelsen nedenfor.

3.1.1. Massen af det sorte hul i M87

Målinger på figur 7 viser, at schwarzschildradius i midten har en vinkelradius på $7{,}6 \cdot 10^{-6}$ ". Afstanden til galaksen fra Mælkevejen er målt til 16,4 Mpc.

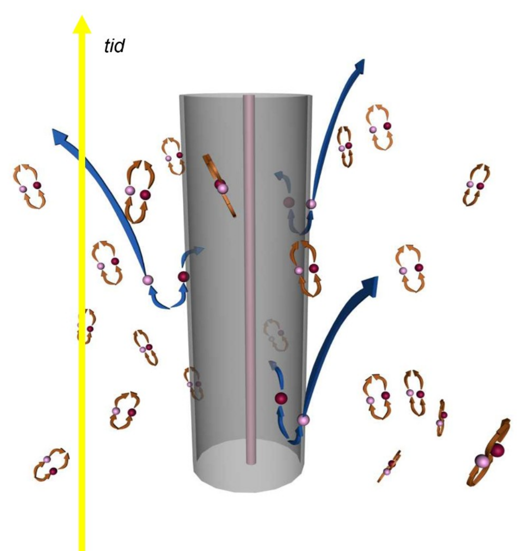
a) Beregn vinklen i grader eller radianer.
b) Benyt tan-reglen for en retvinklet trekant til at beregne schwarzschildradius i meter.
c) Benyt formel 1 eller 2 til at beregne massen af det sorte hul.

-o-

Der findes også et sort hul i midten af Mælkevejen. Dets masse er ca. 4 millioner solmasser. I dag tror vi, at alle galakser har en kerne bestående af et sort hul. Muligvis har det sorte hul virket som en form for kondensationskerne, som har tiltrukket masse og stjerner og dermed lavet galakserne.

3.2. Fordampning af sorte huller

Eftersom intet energi/stof kan slippe væk fra de sorte huller, skulle man umiddelbart forvente, at sorte hullers skæbne må være at eksistere i resten af Universets levetid. Sådan en (klassisk) tankegang er imidlertid ikke rigtig. Kvantemekanikken åbner op for nye muligheder. For eksempel viste Werner Heisenberg, at der på små skalaer, gælder en regel, man kalder *usikkerhedsrelationen.* På formelsprog er usikkerhedsrelationen: $dE \cdot dt > h/(4\pi)$.



Figur 8: Tiden går opad. Man observerer det samme punkt over tid. Partikler dannes og forsvinder igen nærmest øjeblikkeligt. [3]

I ord betyder usikkerhedsrelationen, at en partikels energi er målt med en usikkerhed angivet som *dE*, og usikkerheden på målingens tidspunkt er angivet som *dt*. De to usikkerheder ganget sammen overskrider altid værdien, $h/(4\pi) = 5{,}27\cdot10^{-35}$ J·s. Hvis man betragter et punkt i rummet til et ganske bestemt tidspunkt med *dt* gående mod nul, vil punktets energi altså have en voksende usikkerhed. Der kan altså være energi i punktet! Da energi og masse er ækvivalente størrelser, kan der altså dannes partikler i uhyre korte tidsrum. Disse partikler kaldes for virtuelle partikler.

Normalt vil de forsvinde igen nærmest øjeblikkeligt, men hvis de opstår i nærheden af et sort hul, kan den ene virtuelle partikel smutte ned i det sorte hul, mens den anden slipper væk. Energien til processen kan ikke komme af ingenting, og den bliver taget fra det sorte hul. Derfor lyser sorte huller som absolutte sorte legemer (planckstråling), og derfor er det muligt for sorte huller at fordampe.

Fænomenet er forsøgt illustreret i figur 8, og det fortolkes på følgende måde:
Nederst på figuren er indtegnet en cirkel, hvor den inderste cirkel svarer til det sorte hul, og den yderste cirkel svarer til schwarzschildradius. Man burde tegne en kugle, men så bliver det umuligt at tegne tidsaksen på.

Når tiden går tegnes cirklerne igen og igen for nye tidsværdier. Det er derfor de 2 cirkler bliver til 2 cylindre. De små partikler, der er tegnet ind viser, at partikel-antipartikel-par dannes tilfældigt, og de fleste forsvinder hurtigt igen – undtagen hvis den ene virtuelle partikel flyver ind over schwarzschildradius. Så kan den ikke komme ud og møde sin antipartikel, og antipartiklen flyver så væk.

Stephen Hawking og Jacob Bekenstein har regnet på problemet, og resultaterne kan man se herunder. Temperaturen af et sort legeme med massen M, er givet ved formlen

$$T = 1{,}230\cdot10^{23}\frac{\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg}}{M} \tag{3}$$

Vi kan dermed beregne luminositeten af det sorte hul vha. Stefans-Boltzmanns strålingslov:

$$L = 4\cdot\pi\cdot R^2\cdot\sigma\cdot T^4 = 4\cdot\pi\cdot R^2\cdot\sigma\cdot\left(1{,}230\cdot10^{23}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg}\cdot M^{-1}\right)^4 \tag{4}$$

Indsættes udtrykket fra formel 1 for R_{sch} i formel 4 får man:

$$L = 4\cdot\pi\left(\frac{2\cdot G\cdot M}{c^2}\right)^2\cdot\sigma\cdot\left(1{,}230\cdot10^{23}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg}\cdot M^{-1}\right)^4 = 3{,}58\cdot10^{32}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{kg}^2\cdot M^{-2} \tag{5}$$

Eftersom energi og masse er ækvivalente størrelser, kan vi beregne hvor meget masse, der forsvinder som funktion af tiden:

$$E = M\cdot c^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = E'(t) = M'(t)\cdot c^2 = -L = -3{,}58\cdot10^{32}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{kg}^2\cdot M^{-2} \tag{6}$$

Overvej hvorfor der skal et minus ind i regnestykket ovenfor. Formel 6 er en differentialligning, og den kan man løse analytisk eller vha. et CAS-værktøj. En udregning (som 3. g højniveau-matematikelever kan efterprøve) viser, at løsningen bliver:

$$M(t) = \left(-1{,}19\cdot10^{16}\frac{\mathrm{kg}^3}{\mathrm{s}}\cdot t + M_0^3\right)^{\frac{1}{3}} \tag{7}$$

hvor M_0 er det sorte huls masse til dannelsestidspunktet.

3.2.1. Eksempel – Sort hul med en masse på 10 solmasser

Et sort hul har en masse på 10 solmasser. Levetiden, T_{leve}, for det sorte hul kan bestemmes ud fra formel 7 forudsat, at det sorte hul ikke opsuger masse i løbet af sit levetid. Når det sorte hul er fordampet, er dets masse naturligvis 0, og det giver

$$M\left(T_{leve}\right)=0=\left(-1{,}19\cdot 10^{16}\frac{\mathrm{kg}^3}{\mathrm{s}}\cdot T_{leve}+\left(1{,}989\cdot 10^{31}\ \mathrm{kg}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow T_{leve}=6{,}61\cdot 10^{77}\ \mathrm{s}=2{,}1\cdot 10^{70}\,\mathrm{yr}$$

Det sorte hul eksisterer altså i lang tid. (Universets alder er jo kun 13,8 Gyr.)

-o-

Som eksemplet ovenfor viser, er der i praksis tale om ganske stabile legemer, men som formel 7 og eksemplet ovenfor også viser, afhænger levetiden af det sorte huls masse i 3. potens. Dvs. hvis man lader startmassen af det sorte hul falde, vil levetiden også falde drastisk. I opgave 3.2.2 regnes på problemet for et sort hul med massen 10^{10} kg. Her vises det, at levetiden er faldet til kun $2{,}65\cdot 10^6$ år.

Spørgsmålet er så, om der overhovedet findes så små sorte huller. Inderen Chandrasekhar har vist, at døde stjerner (hvide dværge) med masser på under ca. 1,4 solmasser sagtens kan holde sig selv stabile ved hjælp af en mekanisme, der kaldes degeneret tryk i gasser, så de små sorte huller dannes ikke af stjerner. En teori er, at de er blevet dannet ved et kolossalt tryk i Big Bang.

3.2.2. Eksempel – partikelbeskydning på CERN

Den store accelerator, LHC, ved CERN skyder stråler af ladede partikler ind i hinanden. Hver stråles partikelenergier på $1{,}09\cdot 10^{-6}$ J. Det lyder måske ikke af så meget, men når man tænker på at partiklerne kan være protoner, så svarer energien til 7244 gange protonens hvilemasse. (Husk at $E=mc^2$.) Det er en voldsom energi. Når sådanne protoner hamrer ind i hinanden, kan det måske lykkes at skabe mikroskopiske sorte huller. De er dog så små, at de fordamper med det samme, og derfor er det ikke farligt at lave eksperimenterne. [4]

3.2.3. Opgave: Et sort hul

Betragt et sort hul med massen $1\cdot 10^{10}$ kg.

a) Beregn det sorte huls levetid.
b) Lav en tabel med *t, L*, og *M*-værdier.
c) Lav en (*t, L*)-graf, en (*t, M*)-graf samt en (*M, L*)-graf.
d) Lav en endelig en (*M, L*)-graf.
e) Fortolk de fundne grafer.

-o-

4. Referencer

1. https://www.esa.int/Science_Exploration/Human_and_Robotic_Exploration/Education/Summer_workshop_for_teachers_at_ESTEC
2. https://www.space.com/primordial-black-holes-explain-dark-matter-universe-mysteries
3. https://francis.naukas.com/2010/09/29/observada-por-primera-vez-la-radiacion-de-hawking-en-un-analogo-optico-de-un-agujero-negro/
4. http://press.web.cern.ch/backgrounders/safety-lhc