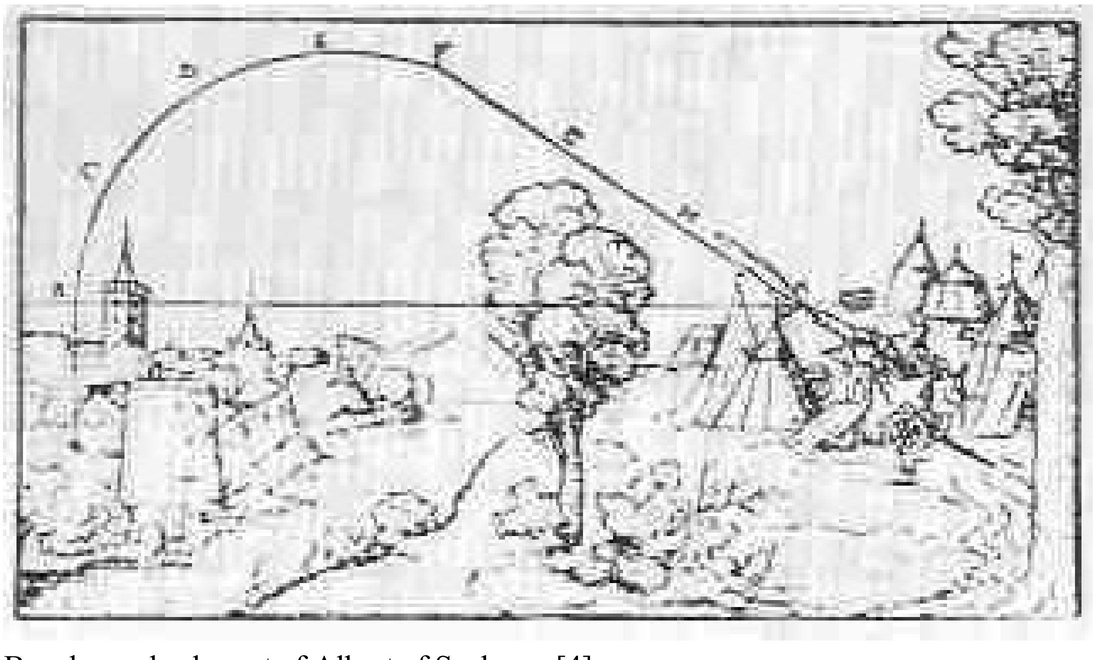
Vulkanske bombers bevægelse



Banekurve beskrevet af Albert af Sachsen. [4].

Forudsætninger

Det forudsættes at du har kendskab til simpel programmering i TinSpire. Hvis du ikke har det, så se f. eks. Appendikset eller noten *Bevægelse med luftmodstand* på astro-gym.dk.

Problemstilling

1. Bevægelsesligningerne for et legeme, der bevæger sig i tyngdefeltet kan udledes analytisk i tilfældet, hvor kun tyngdekraften påvirker bevægelsen.
2. I virkeligheden er der luftmodstand at tage hensyn til, og dette fænomen, skal man tage hensyn til, når bevægelsen af et legeme - f. eks. en vulkansk bombe - skal beregnes.
3. I visse tilfælde betyder luftmodstanden mere end i andre, fordi masse/overfladearealet af et legeme ikke er konstant.
4. Endelig påvirker den geometriske form af legemet også bevægelsen.

I denne opgave skal du simulere vulkanske bombers bevægelse, for at få en fornemmelse af deres egenskaber.

Illustration 1: Krakatau. Vulkanske bombers spor kan ses på billedet. [6].

Teori

Luftmodstanden virker på de vulkanske bomber, når de har forladt krateret. Bevægelsen foregår turbulent, dvs. formlen for luftmodstandskraften kan skrives som

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_{luft} \cdot c_w \cdot A \cdot v^2 \cdot \vec{e}_r \qquad (1)$$

Ovenfor er A et tværsnitsareal af kuglen, $c_w = 0{,}40$ (formfaktoren kaldes også for c_w-værdien og den varierer afhængig af legemets form, (se illustration 6 for eksempler på former, vulkanske bomber kan have), ρ_{luft} = 1,25 kg/m^3 (lufts massefylde), og v er kuglens fart. Luftmodstandsskraften peger i øvrigt hele tiden modsat bevægelsesretningen. $\vec{e}_r$ angiver en retningsvektor for stedbevægelsen. Illustration 3 viser kræfterne, som påvirker kuglen. Forskellige formfaktorer kan ses i illustration 2.

Find enhedsvektorens 1. og 2. koordinater udtrykt ved trigonometriske funktioner og v_x- og v_y-koordinaterne, som antages kendte. **Hint:** Indtegn hastighedsvektoren i illustration 3 og find vinklen mellem v_x og v eller v_y og v. Hvilken retning peger hastigheden imod i forhold til luftmodstandskraften?

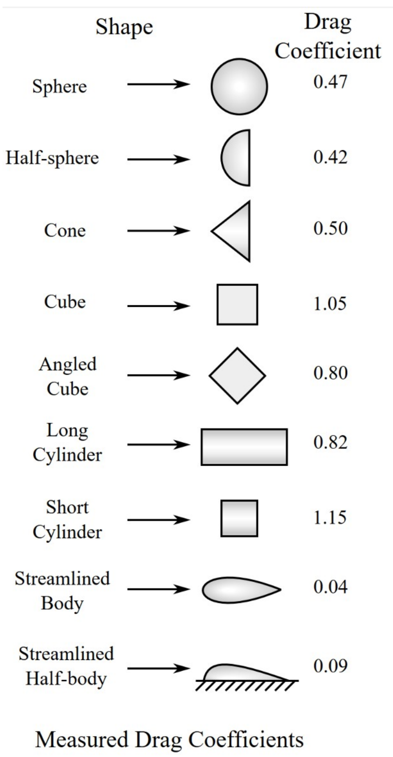


Illustration 2: Formfaktorer. [8].

Du bør også overveje, hvordan enhedsvektorerne skal skrives, hvis man tillader, at bomberne kan skydes i alle retninger.

Derudover virker tyngdekraften naturligvis også på bomberne.

$$\vec{F}_t = m \cdot \vec{g} \tag{2}$$

Endelig skal du anvende Newtons 2. lov til at finde udtryk for accelerationen på legemet.

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_{luft} + \vec{F}_t = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \tag{3}$$

Hvis du er rusten i programmering, så hop til Appendikset og læs det og løs de øvelser, der står der. Hvis du kender nSpire BASIC, kan du læse videre herunder.

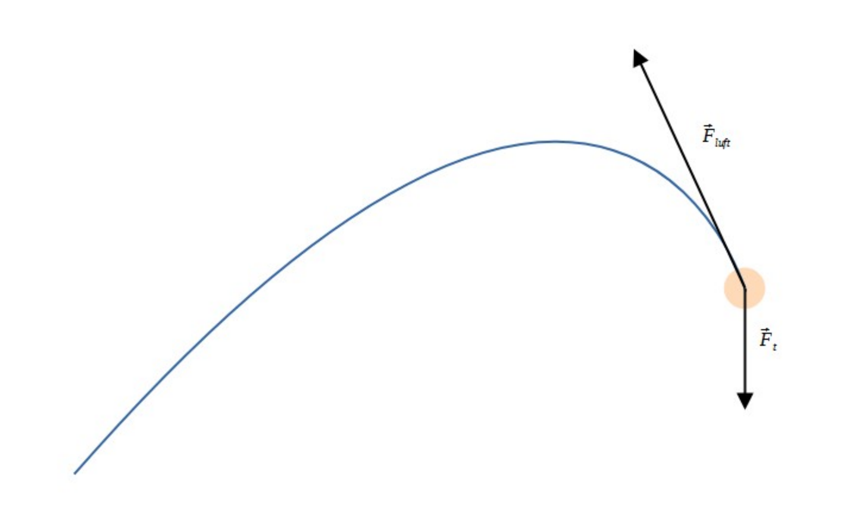


Illustration 3: Kraftanalyse af problemet.

Simulationens kode

1. I nSpires diagramvindue kan du indsætte illustration 4 eller 5. Vælg et koordinatsystem, så akserne passer nogenlunde med målene anført i billedteksten. NB: Vent med at indstille koordinatsystemet indtil du har lavet din første kørsel, da første kørsel overskriver dine indtastede værdier.
2. Benyt formlerne 1-3 til at opstille bevægelsesligningerne for sted-, hastigheds- og accelerationsvektoren.
3. Opskriv samtlige koordinater som skalare størrelser. (Dvs. ikke som vektorer.)
4. Overvej hvordan man finder faldtiden for bomberne. (Hints: For ingen luftmodstand gælder $\Delta s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{fald}^2$. Med luftmodstand bliver maksimalhastigheden ved lodret fald, når tyngdekraften og luftmodstandskraften lagt sammen giver 0.)
5. Benyt RK23-kommandoen til at integrere bevægelsesligningerne.
6. På illustrationerne 6 og 7 kan du se forskellige former for vulkanske bomber samt starthastigheder for bomber udsendt fra vulkanen Stromboli.

Illustration 4: Krakatau. [5]. Højden af vulkanen er 813 m.

Illustration 5: Vulkanen Stromboli. Udbruddet skete i august 2014. [7]. Vulkanens top er 900 m over havet. Fra venstre rand og til midten af vulkanen i vandret retning er ca 1600 m.

Ekstra - kontrol af beregningerne

Man kan delvist teste tilfældet med luftmodstand inkluderet. Det kan du gøre her.

Betragt et lodret fald - det kunne være en muffinform, der lades falde. Hvis man vælger den positive retning til at pege nedad, bliver bevægelsesligningen

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho_{luft} \cdot c_w \cdot A \cdot v^2}{2 \cdot m}. \tag{4}$$

Løsningen til denne ligning er

$$v(t) = v_\infty \cdot \left(\frac{e^{\frac{2 \cdot g}{v_\infty} \cdot (t - t_0)} - 1}{e^{\frac{2 \cdot g}{v_\infty} \cdot (t - t_0)} + 1} \right) = v_\infty \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_\infty} \cdot (t - t_0)\right), hvor\, v_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho_{luft} \cdot c_w \cdot A}}. \tag{5}$$

Juster dit program til at simulere et frit fald, og beregn også den teoretiske hastighed til hver tidspunkt ved hjælp af formlen ovenfor. Sammenlign *v(t)* med de hastigheder, dit program integrerer sig frem til.

Hvis du vil være ekstra særlig omhyggelig kan du også teste stedfunktionen for det lodrette fald. Forskriften står nedenfor.

$$s(t)=\frac{v_\infty^2\cdot\log\left(\cosh\left(\frac{g\cdot t}{v_\infty}\right)\right)}{g}\text{, hvor } v_\infty=\sqrt{\frac{\rho_{luft}\cdot c_w\cdot A}{2\cdot m\cdot g}}. \tag{6}$$

God arbejdslyst.

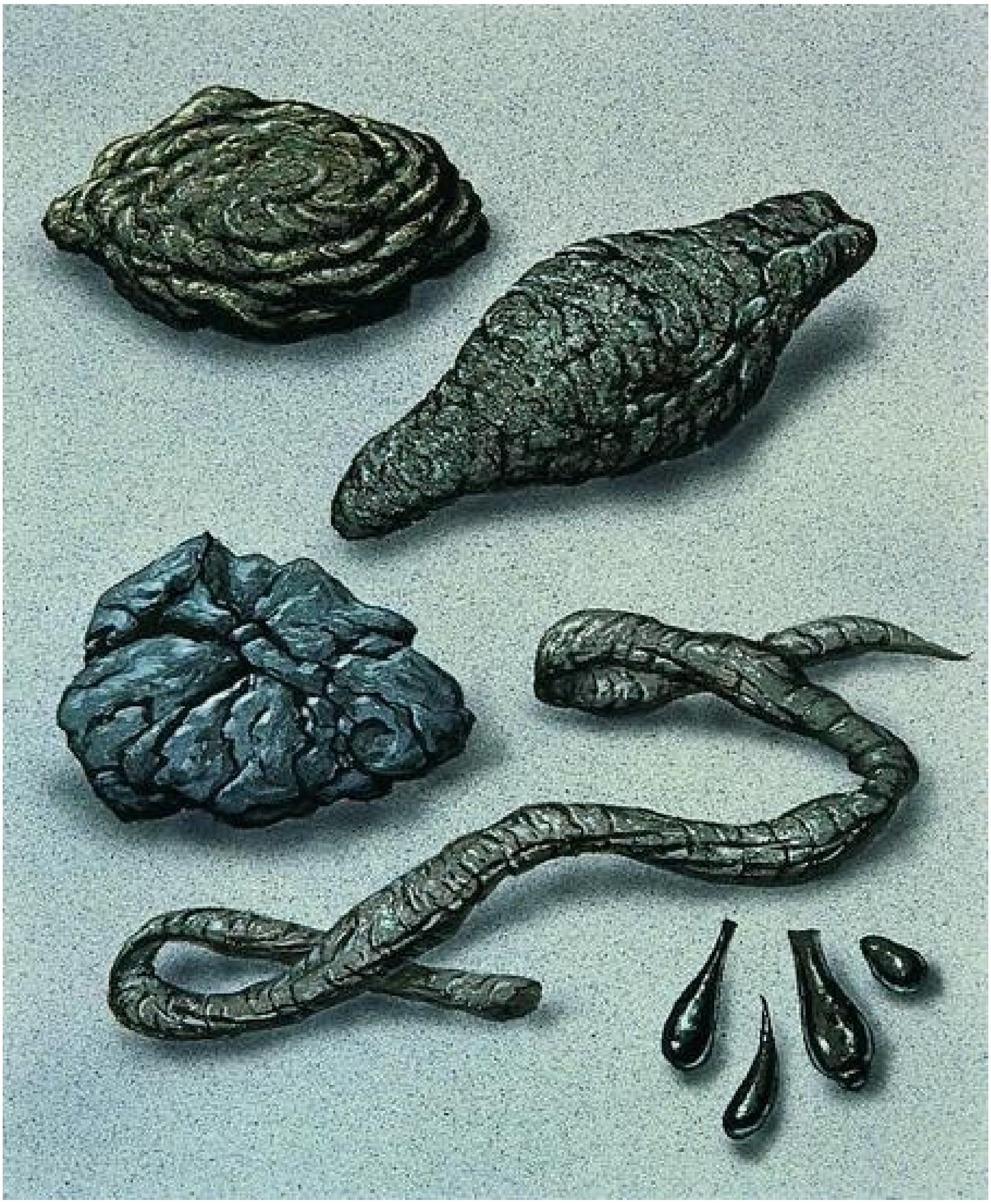


Illustration 6: Vulkanske bomber. De kan have alle mulige former. [3].

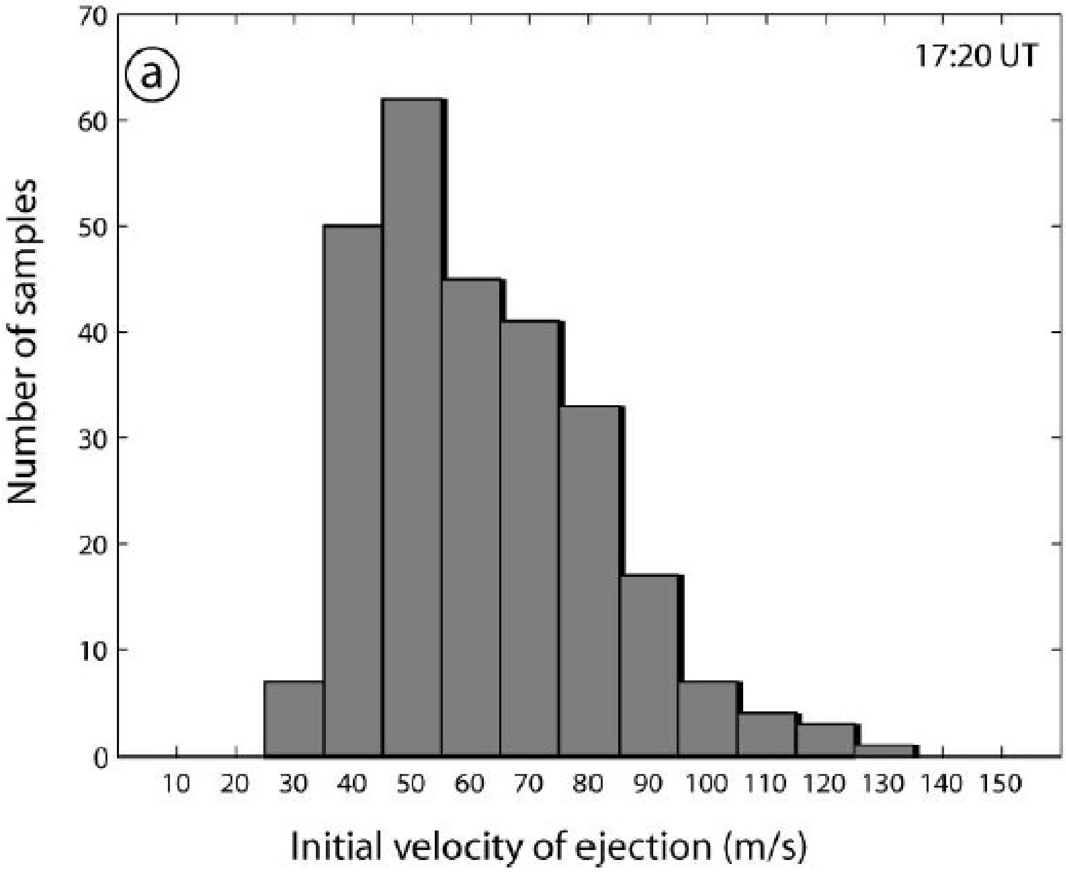


Illustration 7: Histogram over bombehastigheder for en eksplosion på vulkanen Stromboli. [2].

Appendiks

Start af programmeringsmodulet

Når nSpire startes op, skal man tilføje et programmeringsvindue, hvor selve programmet kaldes.

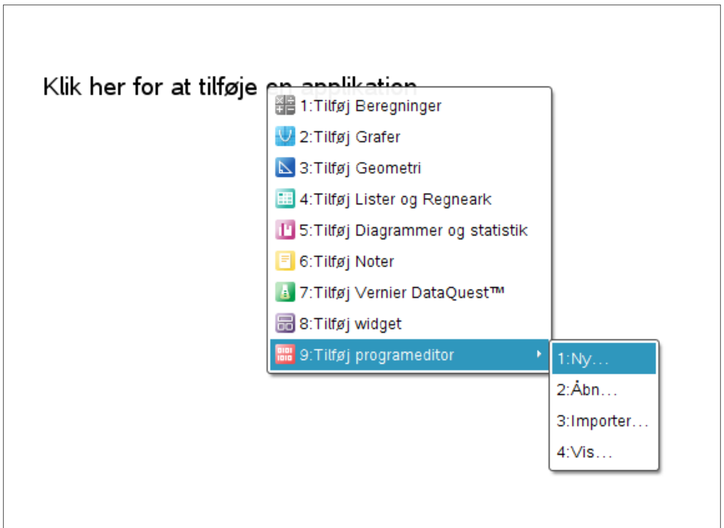


Illustration 8.

Når programmet er skrevet og testet, kan man køre programmet fra et *almindeligt beregningsvindue*, og så kan grafer mv bagefter tegnes på normal vis.

Eksempler på kode

Programkode kan nemt blive totalt rodet, så det kan være en god ide, at krydre programmet med kommentarer, der forklarer, hvad der foregår. Det gør man ved at trykke på *Handlinger-Indsæt kommentar*. (Genvejstast: *Alt+1+8.)* Derved fremkommer tegnet ©, og kommentaren kan skrives efter tegnet.

Skal man gentage en beregning mange gange med en løbende variabel, er en løkke en god måde, at gøre det på. Herunder er der et eksempel på en beregning med en indledende kommentar.

© Herunder beregnes en serie funktionsværdier.
j:=1
For i,1,10,0.5
 x[j]:=i
 f[j]:=5·i+10
 j:=j+1
EndFor

Øvelse

1. Åbn et programvindue og giv det navnet *eksempel*.
2. Prøv at taste programlinierne ovenfor ind i programmet.
3. Højreklik i vinduet og vælg *kontroller syntaks og gem.* Melder maskinen om fejl, så sammenlign programteksten nøje med det, du har skrevet.

4. Åbn et beregningsvindue på en ny side og kør programmet ved at skrive *eksempel()*. (Uden punktummet.)

Ovenfor beregnes *f(x)*=5*x*+10 for $x \in \{1; 1{,}5; 2; 2{,}5 \ldots 10\}$. Alle værdierne gemmes i variablerne *x* og *f*. Bemærk, at *x* og *f* er lister, dvs. de indeholder mange værdier.

Øvelse

1. Åbn programmet eksempel, som du lavede i forrige øvelse.
2. Ret programmets første linie, så der nu står ***Define*** *eksempel(a,b)*.
3. Tilføj linien *Delvar x,f*. Dermed slettes hukommelse med gamle værdier. (Det svarer til, at du tager et nyt stykke papir, så der ikke står en masse gamle ting på dit ark.)
4. Ret beregningen af *f[x]* til *f[j]:=a·i+b*
5. Højreklik og kontroller syntaks og gem.
6. Prøv nu i et beregningsvindue at skrive *eksempel(1,2)*. Når programmet er færdigt, så skriv *f* og tryk på Enter. Nu kan du se funktionsværdierne.
7. Prøv at indtaste kommandoen *eksempel(2,10)*.'
8. Skriv igen *f* og tryk på Enter. Kan du forstå, hvad maskinen regner ud?

Til beregninger kan man bruge nSpires indbyggede funktioner, men bemærk, at hvis man bruger *solve()*-funktionen, så gemmes resultatet som en tekst, og man kan altså ikke regne videre med resultatet. Derfor er *nsolve()*-funktionen mere egnet til at løse en ligning, hvis man får behov for det.

Hvis man vil standse en kørsel, når en variabel får en bestemt værdi, kan man lave en forespørgsel på værdien af variablen og så bede programmet vælge en eller flere handlinger.

For eksempel kan man skrive følgende kode

```
If y<0 Then
 Goto Afslutning
EndIf
..
..
Lbl Afslutning
DelVar x,y
```

Ovenfor ønsker programmøren at afslutte et program, hvis y-variablen bliver negativ. Hvis *y* ikke er negativ fortsætter programmet efter *EndIf*-sætningen.

Lbl er en forkortelse for *Label* og *DelVar* sletter nogle midlertidige variable fra hukommelsen.

Præcis numerisk integration

Runge-Kutta-integration er en præcis måde at løse differentialligninger på. For at metoden kan bruges, skal du skrive udtrykkene for *x*', *y*' samt v_x' og v_y' ind i kommandoen. Dertil skal startbetingelser også anføres. Se illustration 9.

System of equations:

$$\begin{cases} y1' = -y1 + 0.1 \cdot y1 \cdot y2 \\ y2' = 3 \cdot y2 - y1 \cdot y2 \end{cases}$$

with $y1(0)=2$ and $y2(0)=5$

$$\mathrm{rk23}\left(\begin{cases} -y1 + 0.1 \cdot y1 \cdot y2 \\ 3 \cdot y2 - y1 \cdot y2 \end{cases}, t, \{y1, y2\}, \{0, 5\}, \{2, 5\}, 1\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. \\ 2. & 1.94103 & 4.78694 & 3.25253 & 1.82848 \\ 5. & 16.8311 & 12.3133 & 3.51112 & 6.27245 \end{bmatrix}$$

Illustration 9: Anvendelse af Runge-Kutta integration. [9].

Man kan læse mere om programmering hos TI [1].

Referencer

1. http://tibasic.wikia.com/wiki/TI-Basic_Nspire_Programming
2. Karim Kelfoun, Andrew Harris, Martial Bontemps, Philippe Labazuy, Frédéric Chausse, et al.. A method for 3D reconstruction of volcanic bomb trajectories. Bulletin of Volcanology, Springer Verlag, 2020, 82 (4), pp.34. 10.1007/s00445-020-1372-z. hal-02517099
3. Denstoredanske.dk.
4. Fysikhistorie.dk.
5. https://theconversation.com/krakatoa-is-still-active-and-we-are-not-ready-for-the-tsunamis-another-eruption-would-generate-147250
6. https://krakatoavolcanoeruption.weebly.com/background.html.
7. https://earth.esa.int/web/earth-watching/historical-views/content/-/article/stromboli-volcano
8. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/37/14ilf1l.svg
9. TI nSpire CaS. Reference Guide