

# Cepheider



**Af Michael Andrew Dolan Møller  
Rosborg Gymnasium og Hf  
Oktober 2017, august 2022**

## Indholdsfortegnelse

Cepheider.....	3
1. Introduktion.....	3
2. Størrelsesklassebegrebet.....	3
2.1. Afstandsbestemmelse.....	4
2.1.1. Øvelse.....	4
3. HR-diagrammet.....	6
3.1. $\kappa$ -mekanismen.....	6
4. Cepheiders indre karakteristika.....	7
4.1. Øvelse.....	7
5. Sammenfatning af formler.....	8
6. Andre Cepheidetyper.....	8
7. Eksempel - $\delta$ Cep.....	9
7.1. Øvelse. Strålingsvariationen for $\delta$ Cep.....	10
8. Referencer.....	11

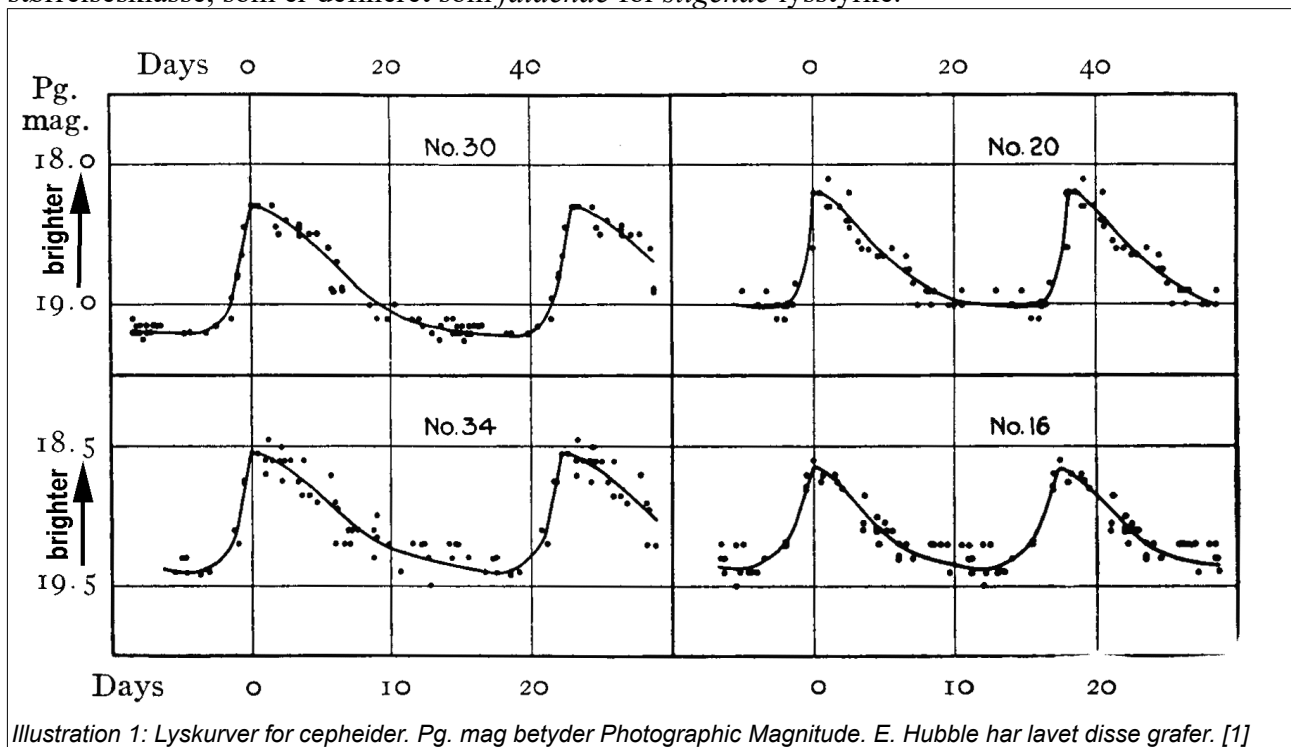
# Cepheider

## 1. Introduktion

Mange (alle?) stjerner pulserer på en eller anden måde. En bestemt klasse af pulserende stjerner kaldes for cepheider. De er opkaldt efter  $\delta$  Ceph, som var den anden fundne stjerne af den type pulsering. Den først fundne cepheide-stjerne hedder  $\eta$  Aql, og den blev opdaget af Edward Pigott 10/9-1784. Den anden opdagelse af  $\delta$  Ceph blev kort tid efter opdaget af John Goodricke. Det er denne type cepheider, som beskrives i denne note.

Henrietta S. Leavitt opdagede i 1908 ved at observere cepheider i ca. samme afstand, at deres tilsyneladende gennemsnitslysstyrke,  $m$ , og deres periode,  $P$ , hang sammen på en simpel måde. 4 år senere lykkedes det den danske astronom Ejnar Hertzsprung at lave den første kalibrering af periode og absolut gennemsnitslysstyrke,  $M$ .

En typisk lyskurve for en cepheide ser ud som på illustration 1. 2. akse viser den tilsyneladende størrelsesklasse, som er defineret som *faldende* for *stigende* lysstyrke.



Cepheider lyser ganske kraftigt, og derfor er de velegnede til at finde afstande til meget fjerne galakser. Derfor vil vi nedenfor gennemgå nogle formler, der gør det muligt at bestemme afstande til cepheider.

## 2. Størrelsesklassebegrebet

Hipparchus observerede stjerner og opdagede, at de ikke lyser lige kraftigt. Han indførte derfor 6 størrelsesklasser for at kvantificere stjernernes lysstyrke. De kraftigste stjerner fik tildelt størrelsesklassen 1, mens de svageste fik størrelsesklassen 6. Altså, jo større størrelsesklasse, des svagere lys fra stjernen.

Efter kameraet blev opfundet (og kikkerten også tidligere var introduceret af Galilei) reviderede Norman Pogson størrelsesklassebegrebet, og hans definition gælder i dag. Han definerede, at forholdet mellem to stjerners målte intensiteter,  $l_i$ , (også kaldet tilsyneladende luminositeter) afhænger eksponentielt af deres målte størrelsesklasser,  $m_i$ . Grunden til, at man får en sådan funktion er, at hjernen opfatter lys på en logaritmisk måde. Formlen, som altså blev en definition, lyder

$$\frac{l_1}{l_2} = 2,5119^{m_2 - m_1} \quad (1)$$

Den absolutte luminositet,  $L$ , af en stjerne hænger sammen med den tilsyneladende luminositet via afstandskvadratloven. Skrevet som formel

$$l = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot d^2} \quad (2)$$

Ovenfor er  $d$  afstanden til stjernen.

Man definerer den *absolutte bolometriske størrelsesklasse*,  $M$ , som den målte *tilsyneladende størrelsesklasse*, hvis man er i afstanden 10 pc. (1 pc =  $3,086 \cdot 10^{16}$  m.) Dvs.  $M = m(10 \text{ pc})$ . Denne definition kan bruges til at sammeknytte  $m$ ,  $M$  og  $d$  i én formel. Hvis man måler  $m$  og på anden vis kan finde  $M$ , kan man altså bestemme afstanden til en stjerne.

## 2.1. Afstandsbestemmelse

Vi forestiller os at observere en stjerne, hvis afstand vi ønsker at finde. Vi benytter definitionen af størrelsesklasse, afstandskvadratloven samt definitionen af absolut størrelsesklasse. Det giver

$$\begin{aligned} l(d) &= \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot d^2} \wedge l(10 \text{ pc}) = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot (10 \text{ pc})^2} \wedge \frac{l(10 \text{ pc})}{l(d)} = 2,5119^{m-M} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{d}{10 \text{ pc}}\right)^2 &= 2,5119^{m-M} \Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{d}{10 \text{ pc}}\right)^2\right) = (m-M) \cdot 0,4 \Leftrightarrow \\ 2 \cdot \log(d) - 2 &= (m-M) \cdot 0,4 \Leftrightarrow \\ \mathbf{5 \cdot \log(d) - 5} &= \mathbf{m - M} . \end{aligned}$$

Ovenfor er det underforstået, at enheden for  $d$  er pc. Det er principielt en simpel sag at måle  $m$ , så hvis vi kan finde  $M$  for stjernen, kan vi beregne dens afstand  $d$  under forudsætning af, at der ikke er interstellar absorption mellem os og stjernen.

### 2.1.1. Øvelse

- Gennemgå beregningerne ovenfor i detalje.
- Isoler afstanden  $d$  i den sidste formel.

I dag er den accepterede sammenhæng mellem den *gennemsnitlige* absolutte størrelsesklasse,  $\overline{M}$ , og cepheidens periode  $P$ , målt i døgn, til

$$\overline{M}_V = -2,78 \cdot \log(P(d)) - 1,35 \quad (3)$$

(Kilde: ESA/ESO-exercises eller [5].)

Indeks  $V$  betyder, at størrelsesklassen gælder i  $V$ -båndet, som er et grønt filter, man kan lægge foran sin detektor. Man skal altså også måle  $m_V$ , (man kalder også  $m_V$  for  $V$ ) for at beregne afstanden  $d$ .

Hvis man ønsker at bestemme stjernens absolutte luminositet, skal man finde  $M$  og ikke  $M_V$ . Man kan beregne  $M$  ved hjælp af formelen  $M = M_V + B.C.$  og  $B.C.$  kan beregnes, når man kender temperaturen af stjernen. Se formel (11). [4]  $B.C.$  kaldes for *den bolometriske korrektion* og den omtales nedenfor.

$M$  er altså et mål for *al* den strålingsenergi, som stjernen udsender, mens  $M_V$  er et mål for den strålingsenergi, som udsendes i et bestemt selvvalgt bølgelængdeområde. Når vi måler lyset fra stjernen, er der sket absorption/spredning i kikkertoptikken samt i atmosfæren. Derudover lyser stjerner i vidt forskellige bølgelængdeintervaller, da bølgelængdefordelingen af lyset fra en stjerne afhænger af dens temperatur. (Plancks strålingslov forklarer dette.) En CCD-detektor, som måler det indkomne lys, er heller ikke lige følsom i alle bølgelængdeområder. Derfor måler vi ikke et mål for  $M$ .

I praksis måler man stjernens tilsyneladende størrelsesklasse gennem forskellige standardiserede farvefiltre. Et system er *UBVRI*-systemet. (Ultraviolet, Blå, Visuel, Rød, Infrarød.) Foruden at måle gennem disse filtre, måler man på en række standardstjerner, som har kendte størrelsesklasser i de forskellige farvebånd. Derved kan man kalibrere sit udstyr, så man uanset udstyr får ensartede størrelsesklasser i de forskellige farvebånd.

For at finde den bolometriske størrelsesklasse, skal man benytte den tidligere nævnte størrelse,  $B.C.$ , *den bolometriske korrektion*, som skal adderes til  $V$ -størrelsesklasserne. Den bolometriske korrektion afhænger kraftigt af stjernens temperatur, så den varierer fra stjerne til stjerne - og man skal derfor kende stjernens temperatur. Den kan findes, hvis man har målt både  $B$ - og  $V$ -størrelsesklassen.

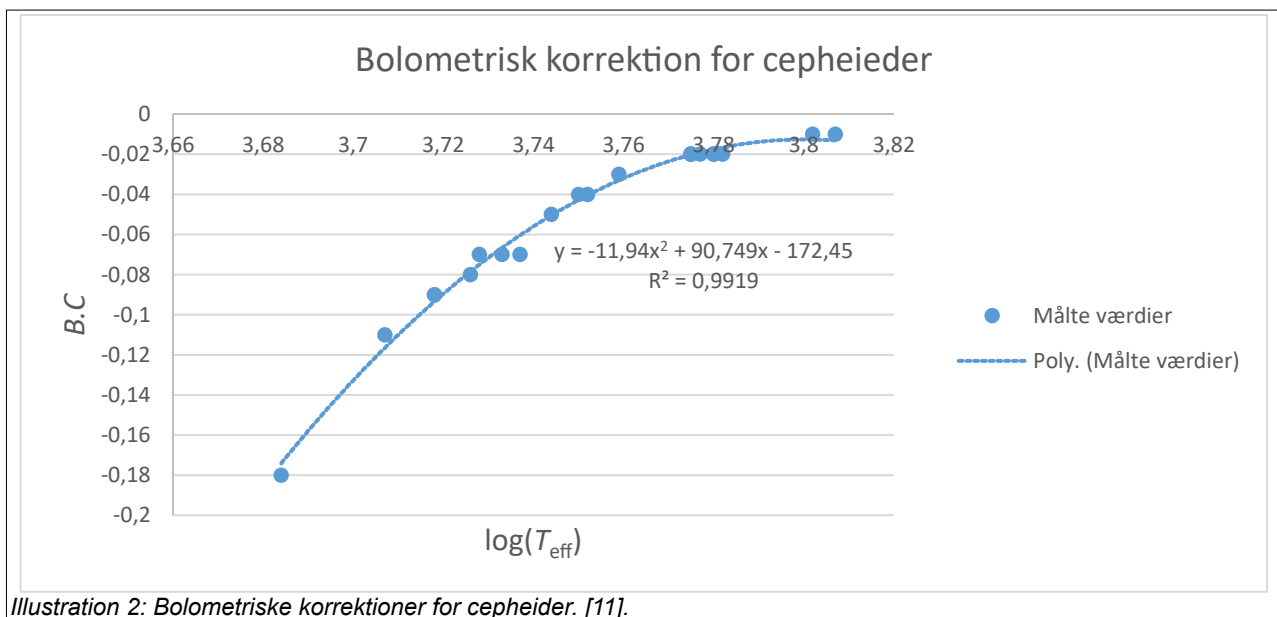


Illustration 2: Bolometriske korrektioner for cepheider. [11].

Det viser sig, at stjerners overfladetemperaturer bedst er gengivet ved formelen

$$T = 4600 \cdot \left( \frac{1}{0,92 \cdot (B - V) + 1,7} + \frac{1}{0,92 \cdot (B - V) + 0,62} \right) \text{ K} \quad (4)$$

[8]

Den bolometriske korrektion for dværgstjerner er i *Astrophysical Quantities* [4] givet ved udtrykket

$$B.C. = 42,54 - 10 \cdot \log(T_{eff}) - \frac{29000}{T_{eff}} \quad (5)$$

Vi er jo interesseret i cepheider, så vi benytter tendensfunktionen fra illustration 2.

$$B.C. = -11,94 \cdot (\log(T_{eff}))^2 + 90,749 \cdot \log(T_{eff}) - 172,45 \quad (6)$$

### 3. HR-diagrammet

Et Hertzsprung-Russell-diagram, forkortet HR-diagrammet, er f. eks. en  $(T, \log(L))$ -kurve, hvor  $T$  er stjernens overfladetemperatur og  $L$  er stjernens absolutte luminositet - også kaldet dens effekt. Det viser sig, at stjernernes placering i dette diagram siger en del om, hvad der foregår inde i dem. På den såkaldte hovedserie, som er markeret med grønt i illustration 3, foregår der hydrogen-fusion i stjernernes indre, mens der i gigantfaserne foregår helium-fusion.

Man kan finde cepheiderne i det såkaldte ustabilitetsspor, og stjernerne er alle forsvundet fra hovedserien. Der findes flere typer cepheider, men her vil vi kun betragte de klassiske typer af population I-stjerner<sup>1</sup>.

Cepheiderne ligger i toppen af det røde område, dvs. de har temperaturer i intervallet ~6-9 kK og deres middelaradi er i intervallet ~5-50 solradier.

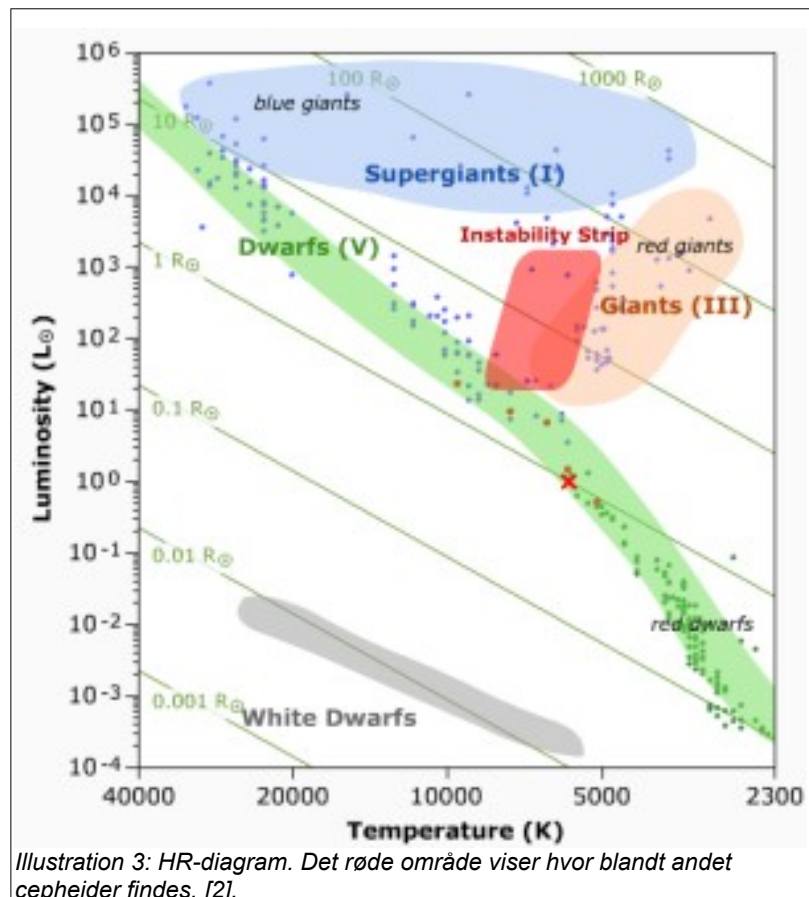


Illustration 3: HR-diagram. Det røde område viser hvor blandt andet cepheider findes. [2].

#### 3.1. $\kappa$ -mekanismen

Grunden til, at cepheide-stjerner pulserer, skyldes en speciel mekanisme, som kaldes  $\kappa$ -mekanismen.

I cepheidens indre findes et lag af ioniseret helium. Enkelt ioniseret helium,  $He^+$ , har en god evne til at lade lys passere, mens dobbeltioniseret helium,  $He^{2+}$ , er ret uigennemtrængeligt for stråling.

Når stjernen har sin mindste radius, er den varmest. Derfor er der energi nok til at dobbeltionisere helium. Lyset kan ikke særlig godt trænge igennem dette plasma, og det udadgående strålingstryk stiger derfor voldsomt. På et tidspunkt vil strålingstrykket overstige det nedadgående tryk fra gassen, der ligger over det ioniserede helium-område, og derfor vil stjernen udvide sig ret hurtigt.

<sup>1</sup> En population I-stjerne er en stjerne, hvis indhold,  $Z$ , af tungere grundstoffer end helium er på ca. 1-2 %. Er  $Z < 0,1$  % kaldes stjernen en population II-stjerne.

Når en gas udvider sig, afkøles den. Derfor vil stjernens temperatur aftage under ekspansionen, og en del af de dobbeltioniserede helium-atomer vil rekombinere med mindst 1 elektron. Derfor vokser gennemskinneligheden, og sollyset kan derfor undslippe stjernen. Den får altså en større udstråling end før. Pga. den afgivne strålingsenergi falder strålingstrykket, og det indadgående tryk fra gravitationen bliver atter størst - stjernen trækker sig sammen. Så stiger temperaturen igen, og der kommer flere dobbeltioniserede helium-atomer, og det hele starter forfra.

For at der kan blive varmt nok i stjernens ydre dele til at dobbeltionisering af helium kan forekomme, skal stjernen have en vis størrelse. Det viser sig, at Solen er for let til at opleve en periode som cepheide.

## 4. Cepheiders indre karakteristika

Astronomer har fundet en sammenhæng mellem en cepheides middelfradius,  $R$ , og dens periode,  $P$ . Denne relation er

$$\log\left(\frac{\bar{R}}{R_{sol}}\right) = 0,680 \cdot \log(P(d)) + 1,146 \quad (7)$$

[3]. Det er tydeligt at se, at selv for kortperiodiske cepheider ( $P \sim 10^d$ ), er deres radier væsentligt større end Solens radius. De er kæmpestjerner, hvad vi jo i forvejen vidste ud fra deres placering i HR-diagrammet.

Vi kan bruge Pogsons definition af størrelsesklasser til at finde cepheiders middeltemperatur og gennemsnitlige absolutte luminositet ved at sammenligne med en kendt stjernes værdier - for eksempel for Solen.

Solens absolutte luminositet  $L_{\odot} = 3,846 \cdot 10^{26}$  W, dens absolutte størrelsesklasse  $M_{\odot} = 4,78$  og dens effektive<sup>2</sup> temperatur  $T_{\odot} = 5,8$  kK.

Først starter vi med at finde en relation mellem to stjerners absolutte størrelsesklasser og luminositeter.

$$l_1 = \frac{L_1}{4 \cdot \pi \cdot d_1^2} \wedge l_2 = \frac{L_2}{4 \cdot \pi \cdot d_2^2} \wedge \frac{l_1}{l_2} = 2,5119^{m_2 - m_1} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{L_1}{4 \cdot \pi \cdot d_1^2}\right)}{\left(\frac{L_2}{4 \cdot \pi \cdot d_2^2}\right)} = 2,5119^{m_2 - m_1} \Leftrightarrow \left(\frac{L_1 \cdot d_2^2}{L_2 \cdot d_1^2}\right) = 2,5119^{m_2 - m_1} \Leftrightarrow \frac{L_1}{L_2} = 2,5119^{M_2 - M_1}.$$

Ved sidste beregning ovenfor, har vi sat afstandene mellem de to stjerner til 10 pc, og dermed kan vi indsætte deres absolutte størrelsesklasser på  $m_1$  og  $m_2$ 's pladser. Bemærk, at i formlen ovenfor skal *den bolometriske størrelsesklasse* indsættes.

### 4.1. Øvelse

Gennemgå beregningerne ovenfor i detalje.

Hvis man anvender Solens værdier, får man følgende sammenhæng for cepheidens absolutte lysstyrke  $L = 2,5119^{4,78 - M} \cdot L_{\odot}$ .

Endelig kan man, hvis man ikke har målt  $B-V$ , benytte Stefans lov

<sup>2</sup> Den effektive temperatur forstås som den temperatur, der giver det bedste Planckkurvefit til stjernespektret. For Solens vedkommende har den denne temperatur nogle hundrede km nede i fotosfæren.

$$\frac{L}{L_{sol}} = \left(\frac{R}{R_{sol}}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_{sol}}\right)^4 \quad (8)$$

til at beregne stjernens overfladetemperatur.

## 5. Sammenfatning af formler

Formlerne til at finde størrelsesklasse, afstand, radius, luminositet og temperatur er sammenfattet nedenfor.

$$\text{Absolut visuel størrelsesklasse: } \overline{M}_V = -2,78 \cdot \log(P(d)) - 1,35. \quad (9)$$

$$\text{Bolometrisk størrelsesklasse M: } M_{bol} = M_V + B.C. \quad (10)$$

$$\text{Bolometrisk korrektion: } B.C. = -11,94 \cdot (\log(T_{eff}))^2 + 90,749 \cdot \log(T_{eff}) - 172,45 \quad (11)$$

**Stjernens effektive temperatur**

$$T = 4600 \cdot \left( \frac{1}{0,92 \cdot (B-V) + 1,7} + \frac{1}{0,92 \cdot (B-V) + 0,62} \right) \text{ K} \quad (12)$$

$$\text{Afstand: } d = 10^{\left(\frac{m-M+5}{5}\right)} \text{ pc} \quad (13)$$

$$\text{Absolut lysstyrke i middel: } L = 2,5119^{4,78 - M_{bol}} \cdot L_{sol} \quad (14)$$

$$\text{Gennemsnitsradius: } \log\left(\frac{\overline{R}}{R_{sol}}\right) = 0,680 \cdot \log(P(d)) + 1,146 \quad (15)$$

$$\frac{T}{T_{sol}} = \left(\frac{R}{R_{sol}}\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(\frac{L}{L_{sol}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (16)$$

## 6. Andre Cepheidetyper

De cepheider, som er dækket af ovenstående beskrivelse er alle stjerner af typen population I, dvs. det er stjerner, som har et stort indhold,  $Z$ , af tungere grundstoffer. Her betyder 'stort' at  $Z > 0,01-0,02$ . ( $Z$  er procentdelen af stjernens masse, der består af grundstoffer tungere end helium.)

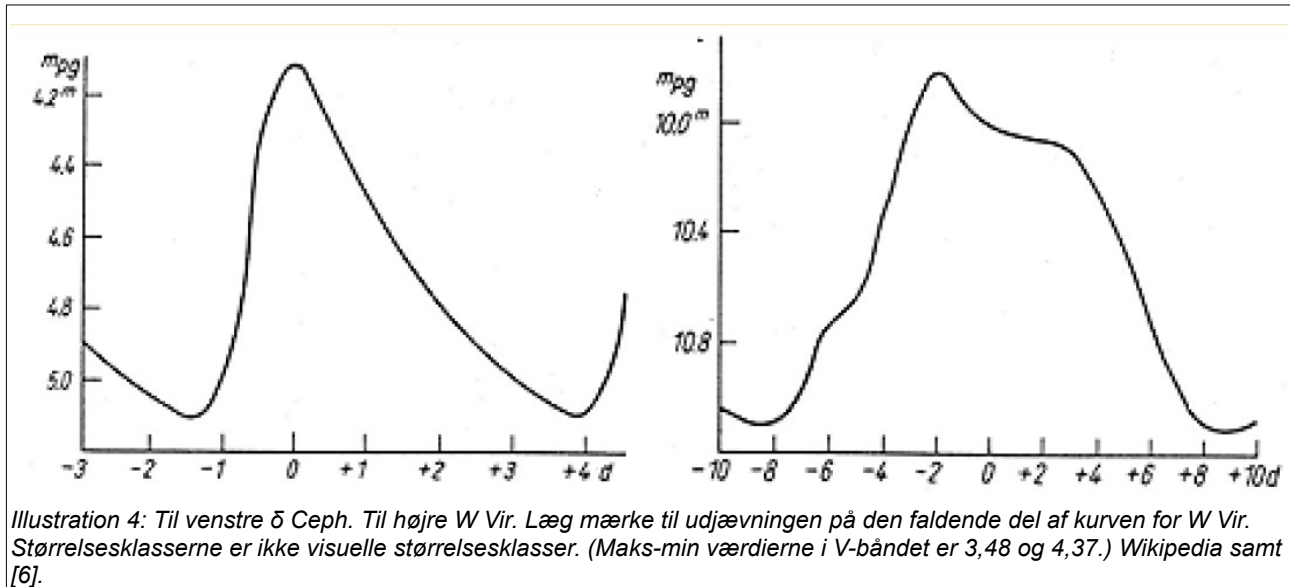
Hvis stjernen er en population II-stjerne har den et metalindhold, der er ca. en tiendedel af indholdet for population I-stjerner. Det giver sig også til kende i dens pulsationshastighed. Formlen bliver for population II-stjerner

$$\overline{M}_V = -2,78 \cdot \log(P(d)) + 0,1 \quad (17)$$

[5] & [6].

For samme periode lyser de altså ca. 1,5 størrelsesklasse svagere. Man kalder cepheider af denne type for *W Vir stjerner*. Man kan skelne de to cepheidetyper ved at undersøge deres lyskurver. Et eksempel kan ses i illustration 4.





Endelig findes der også  $\delta$  Scu-stjerner og RR Lyrae stjerner. Dem kan man læse mere om i [7].

## 7. Eksempel - $\delta$ Ceph

I illustration 4 kan man se en lyskurve for  $\delta$  Ceph. Perioden er  $5,366^d$ . Middelstørrelsesklassen  $m$  aflæses til  $\bar{V} = (3,48+4,37)/2 = 3,93$ . Ud fra disse oplysninger kan vi nu beregne følgende størrelser:

$$\bar{M}_V = -2,78 \cdot \log(5,366) - 1,35 = -3,38.$$

$$\text{Afstanden til stjernen er } d = 10^{\left(\frac{3,93 - (-3,38) + 5}{5}\right)} \text{ pc} = 289 \text{ pc}.$$

$$\text{Stjernens middelradius er } \bar{R} = R_{sol} \cdot 10^{0,680 \cdot \log(5,366) + 1,146}. R_{sol} = 43,9 \cdot R_{sol} = 3,05 \cdot 10^{10} \text{ m} = 0,20 \text{ AU}.$$

For at finde temperaturen og den absolutte luminositet skal vi løse ligningerne (10), (11), (14), (16) mht.  $T$  og  $L$ . (Hvis vi havde  $B$ , kunne (12) anvendes til at finde  $T$ .) Herunder er første ligning Stefans lov sat lig med (14), og 2. ligning er formel (11).

$$4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 = 2,5119^{4,78-M} \cdot L_{sol} \wedge M = -3,38 - 11,94 \cdot (\log(T_{eff}))^2 + 90,749 \cdot \log(T_{eff}) - 172,45.$$

Vi isolerer den bolometriske størrelsesklasse i den første ligning. Det giver

$$M = 4,78 - 2,5 \cdot \log\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{eff}^4}{L_{sol}}\right), \text{ som sættes ind i den anden formel ovenfor. Det giver}$$

$$4,78 - 2,5 \cdot \log\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{eff}^4}{L_{sol}}\right) = -3,38 - 11,94 \cdot (\log(T_{eff}))^2 + 90,749 \cdot \log(T_{eff}) - 172,45$$

Man kan løse ligningerne grafisk eller i et godt CAS-værktøj. TIInspire kan ikke beregne den rigtige løsning, så der laves i stedet for et regneark indeholdende kolonnerne,  $T_{eff}$ , samt tallene for de to

ligninger for  $M$ . I illustration 5 er grafen tegnet. Derved kan vi aflæse skæringspunktet for de to grafer.

Vi aflæser en *middeltemperatur* på  $\bar{T} = 5,75$  kK og en *middel absolut størrelsesklasse* på  $M = -3,41$ , som svarer til en middelluminositet på  $\bar{L} = 1,9$   $kL_{\odot}$ . Ved det sidste resultat er formel (14) anvendt.

Ud fra resultaterne er det tydeligt at se, at cepheiden er enorm i forhold til Solen, både mht. middelfradius og absolut luminositet. Det er derfor, at cepheider er så nyttige, når man skal bestemme kosmologiske afstande.

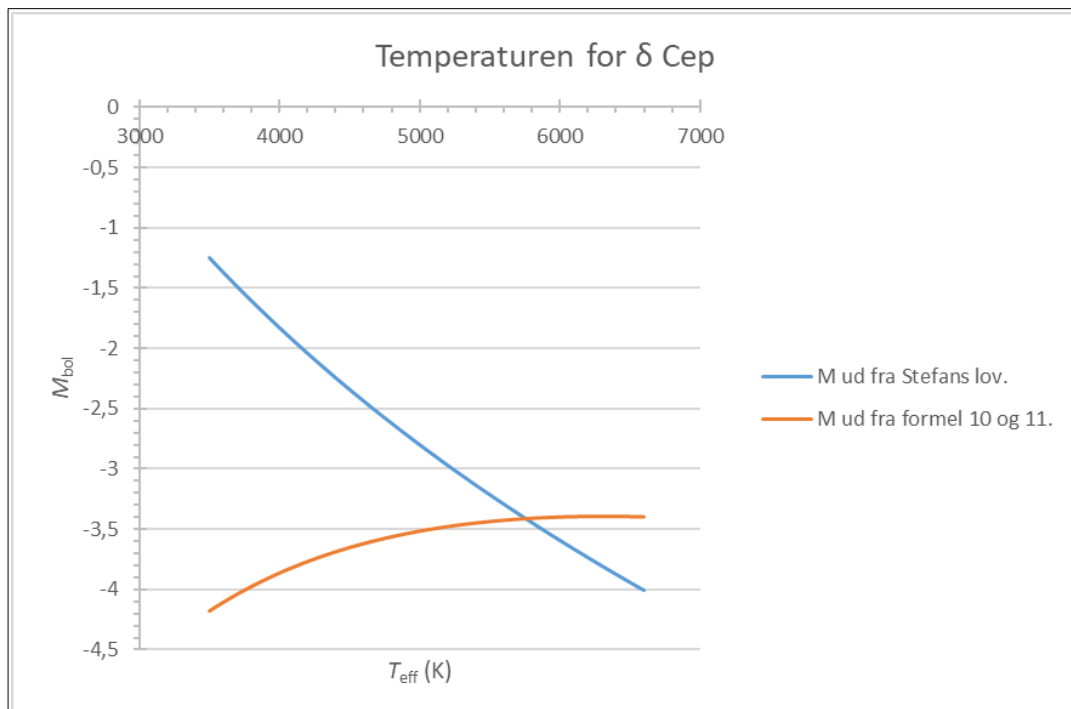


Illustration 5: I grafen er den absolutte størrelsesklasse beregnet hhv. vha. Stefans lov samt formlerne (10) og (11). Skæringspunktet angiver stjernens temperatur og absolutte størrelsesklasse.

### 7.1. Øvelse. Strålingsvariationen for δ Cep.

Antag at cepheidens temperatur ikke varierer ret meget, så du kan sætte den til  $T = 5,75$  kK.

- Beregn den bolometriske korrektion.
- Find den tilsyneladende visuelle størrelsesklasse, når stjernen lyser kraftigst. (Se illustration 4.)
- Beregn den absolutte bolometriske størrelsesklasse, idet afstanden er 289 pc.
- Beregn cepheidens maksimaludstråling. Sammenlign med middelluminositeten.
- Hvor meget ændrer stjernens radius sig?

Ovenstående overslag ændrer sig naturligvis, hvis man inkluderer den temperaturvariation stjernen gennemgår.

## 8. Referencer

1. <http://ircamera.as.arizona.edu/Astr2016/lectures/galaxies.htm>.
2. [http://astro.unl.edu/naap/hr/hr\\_background3.html](http://astro.unl.edu/naap/hr/hr_background3.html)
3. Ap. J, **512**, 553-557, 1999. Gieren et al. *Calibrating the Cepheid Period-Radius Relation with Galactic and Magellanic Cloud Cepheids.*
4. C. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, 3<sup>rd</sup> edition, Athlone Press, 1974.
5. <https://academic.oup.com/mnras/article/308/4/969/1030435/Direct-calibration-of-the-Cepheid-period> .
6. Hoffmeister et al, 1985, *Variable Stars*. (<http://www.aavso.org/files/vsots/spring03.pdf>)
7. Kurtz et al, *Asteroseismology*, Springer Verlag 2010
8. <https://arxiv.org/abs/1201.1809> F. Ballasteros, *New insights into Black Bodies*, EPL Volume 97, Number 3, February (2012) 34008.
9. The Astrophysical Journal Supplement, Volume 208, Issue 1, article id. 9, 22 pp. (2013).
10. Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics.
11. The Astronomical Journal, 124:2931-2942, nov. 2002: *The Distance Scale for Classical Cepheid Variables*. David G. Turner og James F. Burke.



Illustration 6: Pickerings computere. Henrietta Swan Leavitt sidder under grafen på væggen. [10].