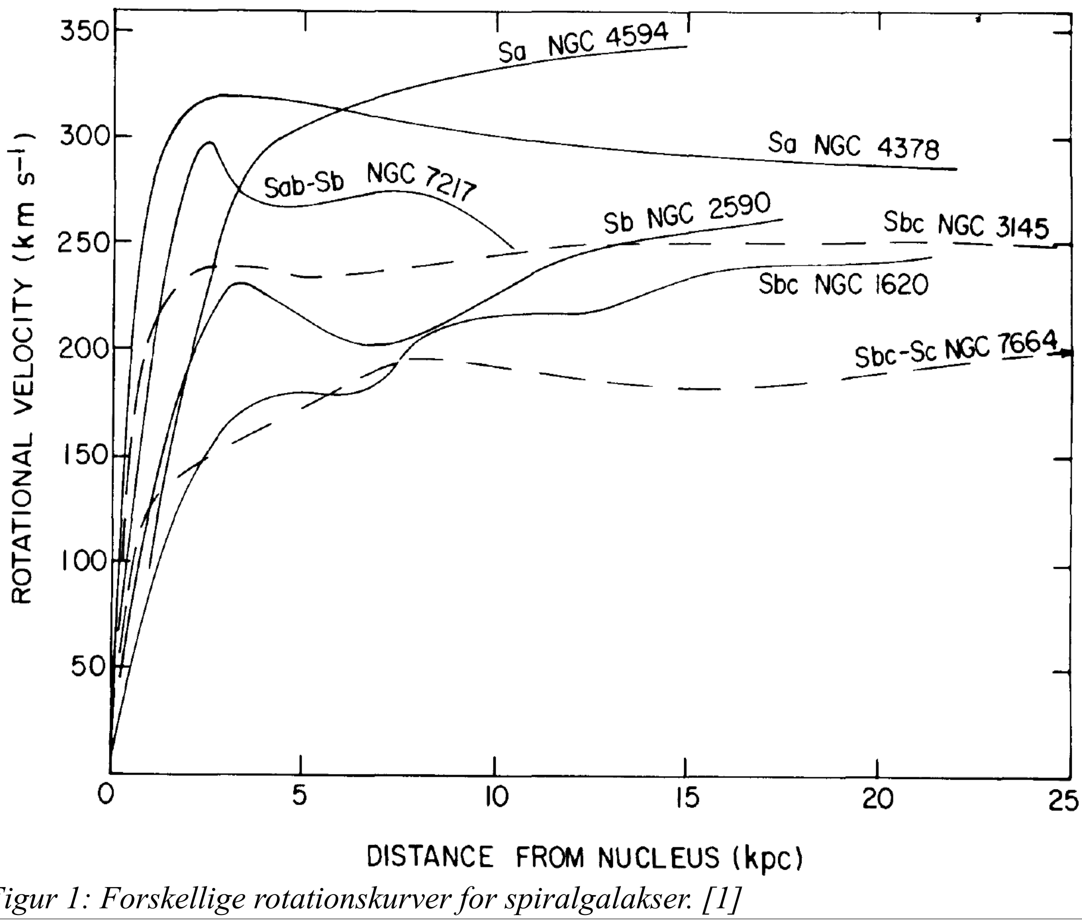
Mælkevejens rotationskurve del 2

I øvelsen nævnt i kilde [2] kan man måle en rotationskurve for Mælkevejen for $r < R_0$, hvor R_0 er Solens afstand til Mælkevejens centrum. I denne notes afsnit 1 skitseres, hvordan man kan give et lidt bedre estimat for Mælkevejens masse, hvis man antager, at rotationskurven bliver vandret for store R.

I afsnit 2 skitseres en fremgangsmåde til teoretisk at modellere en vilkårlig galakses rotationskurve. Dette kunne f. eks. gøre i forbindelse med et SRP-projekt i fagene *Fysik A* og *astronomi C*. I modellen antager vi implicit at Newtons teoremer er gyldige, og det kan en SRP-elev jo undersøge i forbindelse med fysik.

1. Kvadrant 2

Når man måler Mælkevejens rotationskurve i 1. kvadrant, ser man, at rotationshastigheden går mod en konstant. Det er konsistent med tilsvarende kurver for andre spiralgalakser. Se figur 1.



Figur 1: Forskellige rotationskurver for spiralgalakser. [1]

Hvis vi bruger denne antagelse, kan vi få et mere præcist mål for Mælkevejens masse, hvis vi også observerer i 2. kvadrant. Betragt figur 2.

Observatøren er placeret i punktet markeret med bogstavet *S*. Vi betragter en *H I*-sky, som, vi antager, bevæger sig i en cirkelbane omkring Mælkevejens centrum, der er markeret med bogstavet *C*. Vi ser bort fra Jordens rotation og spin.

Øvelse 1

Betragt figur 2.

a) Overbevis dig om at $\alpha = l - \frac{\pi}{2}$, hvor l er H I-skyens galaktiske længdegrad.
b) Overbevis dig om at $\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$.
c) Indtegn radialhastighedskomposanterne for Solen, V_{0r}, samt for H I-skyen, V_r.
d) Vis at $\sin(\gamma) = \frac{V_r}{V}$.
e) Vis at $V_{0r} = V_0 \cdot \sin(l)$.

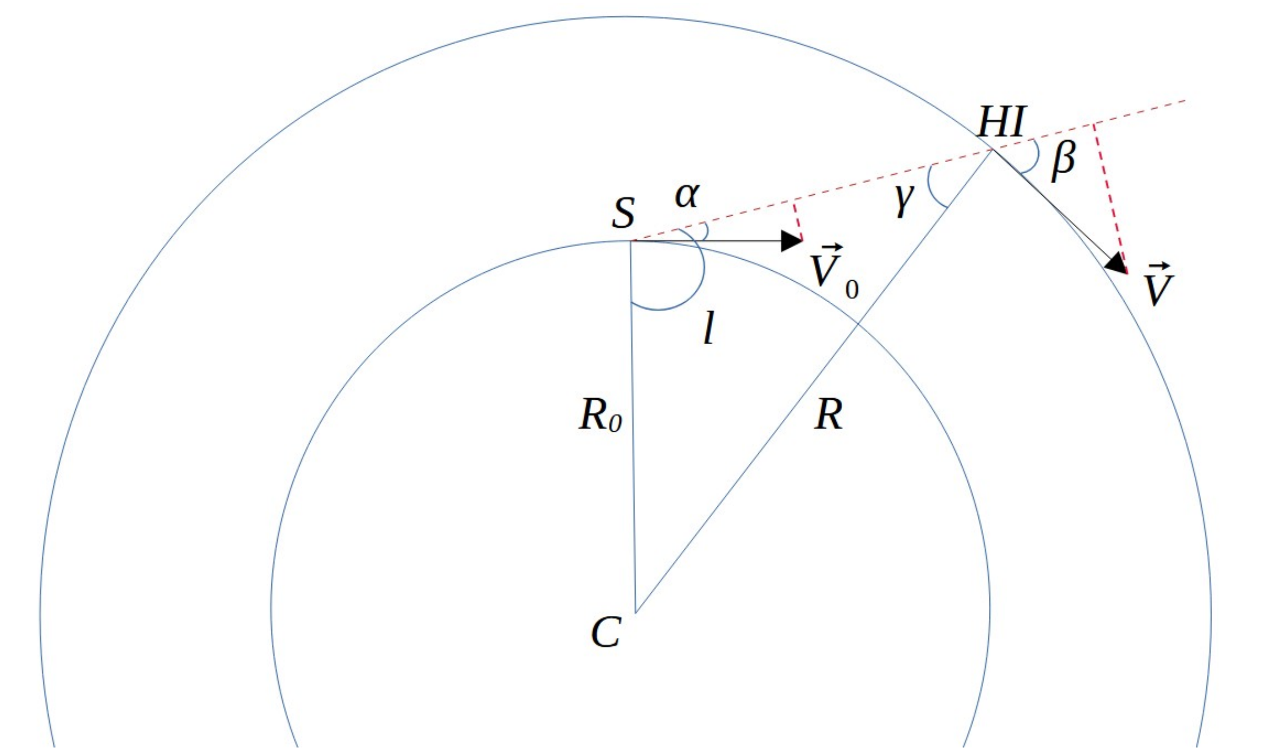
Den *målte* radialhastighed, v_r, er differencen mellem radialhastighederne for observatør og brintsky. Dvs. $v_r = V_r - V_{0r}$.

f) Substituer radialhastighedsudtrykkene fra spørgsmål c ind i ligningen for v_r og vis at $\sin(\gamma) = \frac{v_r + V_0 \cdot \sin(l)}{V}$.
g) Benyt en sinusrelation til at vise formlen $\frac{\sin(l)}{R} = \frac{\sin(\gamma)}{R_0}$.
h) Bortsubstituer $\sin(\gamma)$ i udtrykket fra spørgsmål f og isoler R.

-o-

I øvelsen ovenfor skulle du gerne have fundet formlen

$$R = \frac{\sin(l) \cdot V \cdot R_0}{v_r + V_0 \cdot \sin(l)} \qquad (1)$$



Figur 2: Skitse af geometrien bag ***S****olens- og en* ***HI****-skys bevægelse i afstanden* ***R*** *omkring Mælkevejens centrum, som er markeret med et C. Bevægelserne er antaget som cirkelbevægelser.*

Hvis Mælkevejens rotationskurve er som andre spiralgalaksers kurver, så er $V = V_0$. Dvs. (1) kan reduceres til

$$R = \frac{\sin(l) \cdot R_0}{v_r / V_0 + \sin(l)} \tag{2}$$

Øvelse 2

Har du en konto til EU-HOU-teleskoperne, kan du i kvadrant 2 måle et sæt (l, v_r)-værdier for en serie H I-skyer. Hvis du ikke har en konto, kan du bruge simulatoren.

a) Mål v_r for galaktiske længdegrader i intervallet] 90º, 180º]
b) Forlæng din rotationskurve, som du lavede i øvelsen *Mælkevejens rotationskurve*. [2]
c) Lav et estimat for Mælkevejens totale masse.

2. Modellering af galaksens indhold

Galaksen indeholder flere stjernepopulationer – der er (mindst) to skivepopulationer, en fordeling af kuglehobe omkring Mælkevejens centrum, og der er en kernepopulation (bulge) af stjerner. Endelig er der også en mørkt stof-halo. Vi regner herunder med massedensiteter vel vidende, at det er *lys*, vi måler på. Vi *antager* et konstant forhold mellem masse og lysstyrke givet ved *masselysstyrkeforholdet*

$$\Upsilon = M / L, \tag{3}$$

hvor M er den masse, der udstråler lysstyrken L.

Ved mørkt stof-haloen og den ene kernemodel arbejder vi med almindelig massedensitet, dvs. masse/volumen, men for skiven og for den eksponentielle model for kernen arbejder vi med overfladedensitet, dvs. masse/areal. Det skyldes, at man er i stand til at *måle* overfladelysstyrker, og dermed kan man bestemme overfladedensiteter ved brug af (3) - derfor bliver man i stand til begrænse nogle af parametrene i modellen over galaksens massefordeling.

Kernen

Homogen- eller eksponentiel model. (For at en gymnasieelev kan være med.)

Homogen densitetsmodel

Hvis densiteten af kernen er en konstant, vil man kunne opskrive massefordelingen *M(r)*, som

$$M(r)=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot\varrho_0=M_0\cdot\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 \tag{4}$$

Ovenfor skal man huske, at massen bliver konstant, M_0, når radius bliver større end kernens størrelse.

Eksponentiel densitetsmodel

Når man betragter kernen, observerer man jo ikke en 3-dimensionel kerne – derimod ser vi i 2 dimensioner. *Lyset* fra sådan en kerne kan beskrives af en såkaldt *de Vaucouleur*-fordeling, som også kaldes en *Sersic-fordeling* med indeks 4. Den er lidt træls at regne på, så vi laver en lidt simplere antagelse, nemlig en *Sersic-fordeling* med indeks 1. Den målte overfladelysstyrke er dermed givet ved formlen

$$F(R)=F_0\cdot\exp\left(-\beta\cdot\left(\frac{R}{R_e}-1\right)\right),\beta=1{,}676 \tag{5}$$

Den radius, hvor halvdelen af den samlede lysstyrke af kernen er opnået, kaldes i formlen for R_e.

Ovenfor er radius angivet med stort *R*, for at markere at det nu er den projicerede radius, som er målt direkte på et 2D-billede. Hvis vi ganger masse-lysstyrkeforholdet på *F,* får vi *overfladetætheden*, som betegnes med bogstavet σ. Den måles i enheden M_{sol}/kpc^2. Dvs. vi kan nu skrive

$$\sigma(R)=\sigma_0\cdot\exp\left(-1{,}676\cdot\left(\frac{R}{R_e}-1\right)\right) \tag{6}$$

Hvis man integrerer (6) over overfladen af kernen, får man udtryket som vist herunder.

$$M(R)=\frac{2\cdot\pi\cdot\sigma_0\cdot R_e\cdot e^{\beta}}{\beta}\cdot\left(\left(1-\exp\left(\frac{-\beta\cdot R}{R_e}\right)\right)-R\cdot\exp\left(\frac{-\beta\cdot R}{R_e}\right)\right) \tag{7}$$

Mørkt stof-haloen

Mørkt stof-haloen beskrives ofte som en såkaldt *isoterm sfære*. Stoffordelingen beskrives ved ligningen

$$\varrho = \frac{\varrho_{centrum}}{1+\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \tag{8}$$

Ovenfor kaldes r_0 for *King-radius*. Den er givet som den radius, hvor densiteten er faldet til det halve af densiteten i centrum af fordelingen.

Ligningen er udledt ved at antage hydrostatisk ligevægt for en sfærisk symmetrisk fordeling af mørkt stof, der opfører sig som en ideal gas ved en konstant temperatur.

Eleven kan vise, at massefordelingen for den isoterme sfære er givet ved udtrykket

$$M(r) = 4\cdot\pi\cdot\varrho_0\cdot r_0^3\cdot\left(\frac{r}{r_0} - \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)\right), \tag{9}$$

hvor ϱ_0 er centraldensiteten, og r_0 er King-radius.

Skiven

Det viser sig at skivens lys også kan beskrives ved hjælp af en Sersic-profil, men den er jo ikke sfærisk symmetrisk, så der er det sværere at løse problemet med at finde massen, som funktion af radius. Derfor er det også besværligt at finde cirkelhastighedsbidraget for skiven. Det viser sig, at løsningen til hastighedsfunktionen er

$$v_{c,\,disk}^2 = 4\cdot\pi\cdot\sigma_0\cdot G\cdot R_D\cdot\left(\frac{R}{2\cdot R_D}\right)^2\cdot\left(I_0\left(\frac{R}{2\cdot R_D}\right)\cdot K_0\left(\frac{R}{2\cdot R_D}\right) - I_1\left(\frac{R}{2\cdot R_D}\right)\cdot K_1\left(\frac{R}{2\cdot R_D}\right)\right) \tag{10}$$

Ovenfor er R_D en skalalængde for skiven, og funktionerne I_i og K_i er modificerede besselfunktioner, som Excel har som indbyggede funktioner.

3. Hastighedsfordelingen

Hvis man antager, at stjernerne i skiven bevæger sig i jævn cirkelbevægelse, så kendes formlen

$$a = \frac{v_c^2}{r} \tag{11}$$

Fra Newtons 2. lov kan vi skrive den resulterende acceleration som

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{res}}{m} = \frac{\vec{F}_{mørkt\ stof} + \vec{F}_{kerne} + \vec{F}_{skive}}{m} = \vec{a}_{mørkt\ stof} + \vec{a}_{kerne} + \vec{a}_{skive} \tag{12}$$

Ovenfor er m massen af en stjerne.

Inde i skiven peger alle accelerationerne parallelt ind mod galaksens centrum, så størrelsen af accelerationen er

$$a = a_{mørkt\,stof} + a_{kerne} + a_{skive} \tag{13}$$

Ved at koble (11) og (13) får man

$$v_c^2 = r \cdot a_{mørkt\,stof} + r \cdot a_{kerne} + r \cdot a_{skive}$$

$$v_c^2 = v_{mørkt\ stof}^2 + v_{kerne}^2 + v_{skive}^2 \tag{14}$$

For at finde de enkelte komponenters bidrag til rotationshastigheden indsættes udtrykkene for masserne i formlen for cirkelbevægelse (15), som gælder for sfærisk symmetriske massefordelinger. Dvs. formlen duer for kernen og mørkt stof-haloen, men den kan ikke bruges for skiven. For skiven kan man i stedet for direkte bruge formel (10).

$$v(r) = \sqrt{\frac{G \cdot M(r)}{r}} \tag{15}$$

Det er altså nu muligt at tegne en teoretisk rotationskurve ved brug af formlerne (4) eller (7) samt (9), (10), (14) og (15).

4. Referencer

1. Rubin et al. *EXTENDED ROTATION CURVES OF HIGH-LUMINOSITY SPIRAL GALAXIES. IV. SYSTEMATIC DYNAMICAL PROPERTIES, Sa-Sc*. The Astrophysical Journal, **225**:L107-L111, 1978 November 1
2. https://astro-gym.dk/aktiviteter/ (Øvelsen *Mælkevejens rotationskurve.*)
3. https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept16/Sofue/Sofue4.html